CHAPITRE

2 Variations des fonctions associées

ACTIVITÉS (page 49)

Activité

1 d) On obtient deux paraboles qui sont superposables (pour $k = 0$).

f) et **g)** Le nombre b reste constant, égal à k si k est positif et à $-k$ sinon.

2. b) Elles ne sont pas, en général, superposables.

c) Pour $k \neq 0$: $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

d) $k = -1$.

PROBLÈME OUVERT

$f(x) = -\dfrac{1}{x} = g(x)$. Alors $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

f et g sont strictement croissantes sur $\text{I} =]0\,;+\infty[$, et h est strictement décroissante sur I.

EXERCICES Application (page 54)

1 a) $\dfrac{x}{3} + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -3 \Leftrightarrow x \in \text{I} = [-3\,;+\infty[$.

b) $u : x \mapsto \dfrac{x}{3} + 1$ est une fonction affine strictement croissante sur I. Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation : f est donc strictement croissante sur I.

2 a) $-x + 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 3 \Leftrightarrow x \in \text{I} =]-\infty\,; 3]$.

b) $u : x \mapsto -x + 3$ est une fonction affine strictement décroissante sur I. Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation : f est donc strictement décroissante sur I.

3 a) Pour tout x, $2x^2 + 1 \geqslant 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier sur $\text{I} = [0\,;+\infty[$.

b) $u : x \mapsto 2x^2 + 1$ est une fonction strictement croissante sur I. Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation : f est donc strictement croissante sur I.

4 a) Pour tout x, $|x| \geqslant 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier sur $\text{I} =]-\infty\,; 0]$.

b) Pour tout $x \in]-\infty\,; 0]$, $|x| = -x$.
$u : x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur I.
Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont même sens de variation : f est donc strictement décroissante sur I.

5 a) $1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \geqslant -1 \Leftrightarrow x \leqslant -1$
$\Leftrightarrow x \in \text{I} =]-\infty\,; -1]$.

b) Sur I, les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x} + 1$ sont strictement décroissantes : f est donc strictement décroissante sur I.

6 $u : x \mapsto \dfrac{x+3}{2}$ est une fonction affine strictement croissante sur $\text{I} = [-3\,;+\infty[$, f est donc strictement croissante sur I.

x	-3	-1	5	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	1 ↗	4 ↗	

Si $x \in [-1\,;5]$, alors $\sqrt{\dfrac{x+3}{2}} \in [1\,;2]$.

7 **a)** Pour tout x de $I =]3\,;+\infty[$, l'expression $3 - x$ est non nulle. Donc f est bien définie sur I.
b) $u : x \mapsto -x + 3$ est une fonction affine strictement décroissante sur I. Les fonctions u et $\dfrac{1}{u}$ varient en sens contraires ; f est donc strictement croissante sur I.

8 **a)** Tout nombre de $I =]-\infty\,;0[$ est non nul, f est bien définie sur I.
b) $u : x \mapsto x^2$ est une fonction strictement décroissante sur I. Les fonctions u et $\dfrac{1}{u}$ varient en sens contraires :
f est donc strictement croissante sur I.

9 **a)** Tout nombre de $I =]-\infty\,;0[$ est non nul, f est donc bien définie sur I.
b) $u : x \mapsto |x|$ est une fonction strictement décroissante sur I. u et $\dfrac{1}{u}$ varient en sens contraires :
f est donc strictement croissante sur I.

10 **a)** Pour tout x de $I =]-1\,;+\infty[$, l'expression $x + 1$ est non nulle, donc f est bien définie sur I.
b) $u : x \mapsto \dfrac{x+1}{2}$ est une fonction affine strictement croissante sur I. Les fonctions u et $\dfrac{1}{u}$ varient en sens contraires :
f est donc strictement décroissante sur I.

11 **a)** Pour tout x de $I = \left]\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$, l'expression $2x - 5$ est strictement positive, f est bien définie sur I.
b) La fonction (affine) $x \mapsto 2x - 5$ est strictement croissante sur I. Il en est donc de même pour $u : x \mapsto \sqrt{2x-5}$.
u et $\dfrac{1}{u}$ varient en sens contraires :
f est donc strictement décroissante sur I.

12 Pour tout $x > 3$, l'expression $x - 3$ est strictement positive, f est bien définie.
La fonction (affine) $x \mapsto x - 3$ est strictement croissante sur I. Il en est de même pour la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x-3}$.
u et $\dfrac{1}{u}$ varient en sens contraires :
f est donc strictement décroissante sur $]3\,;+\infty[$.

x	3	4	19	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	1/4	↘

13 **a)** f est définie pour tout réel x non nul donc sur D.
b) Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{3x} - 5$ varient dans le même sens : elles sont strictement décroissantes sur chacun des intervalles qui composent D.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

14 **a)** f est définie pour tout réel x non nul donc sur D.
b) Sur $]-\infty\,;0[$, la fonction $x \mapsto |x|$ est strictement décroissante donc la fonction $u : x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ est strictement croissante.
Il en est de même pour la fonction $2u$:
f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$.
Un raisonnement analogue nous amène à :
f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↘

15 **a)** f est définie pour tout réel $x \neq 1$ donc sur D.
b) $u : x \mapsto x - 1$ est une fonction affine strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$. Les fonctions u et $\dfrac{1}{u}$ varient en sens contraires, mais $\dfrac{1}{u}$ et $\dfrac{1}{u} + 4$ varient dans le même sens :
f est donc strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$.
Un raisonnement analogue nous amène à :
f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;1[$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

16 **a)** f est définie pour tout réel x positif et différent de 1 donc sur D.
b) Sur $[0\,;1[$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $u : x \mapsto \sqrt{x} - 1$ sont strictement croissantes. u et $\dfrac{1}{u}$ varient en sens contraires :
f est donc strictement décroissante sur $[0\,;1[$.
Un raisonnement analogue nous amène à :
f est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

EXERCICES Activités de recherche (page 58)

21 Modéliser une situation

• Les outils :

– Tableau de variation d'une fonction.
– Variations de la fonction *carré*.
– Variations de $\sqrt{u}$.

• Les objectifs :

– Modéliser une situation.
– Étudier les variations d'une distance.

1.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

On peut conjecturer un minimum de 1 pour $x = 0$, c'est-à-dire lorsque M est en O, et qu'il n'y a pas de maximum : BM peut être aussi grand que l'on veut en « éloignant » M de O (x positif, comme x négatif).

2. Théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBM : $BM^2 = OB^2 + OM^2 = 1 + x^2$; donc $BM = \sqrt{x^2 + 1}$.

3. Pour tout nombre réel x, $x^2 + 1$ est positif.

a) La fonction *carré* est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Il en est de même pour u.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u(x)$	↘	1	↗

b) u et $\sqrt{u}$ varient dans le même sens : f est donc décroissante sur $]-\infty\,; 0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

c) Les conjectures du **1.** sont ainsi vérifiées.

22 Utiliser une transformation d'écriture

• Les outils :

– Décomposition d'une fonction.
– Tableau de variation.
– Variations de $\dfrac{1}{u}$, de λu, de $u + k$.

• Les objectifs :

– Étudier les variations d'une fonction homographique.
– Étudier la position relative d'une courbe et d'une droite.

1. a) $3x - 2 = 3(x + 1) - 5$. **b)** $f(x) = 3 - \dfrac{5}{x+1}$.

2. $x \mapsto x + 1 \mapsto \dfrac{1}{x+1} \mapsto -5 \times \dfrac{1}{x+1} \mapsto 3 - \dfrac{5}{x+1}$.

3. Sur l'intervalle I :

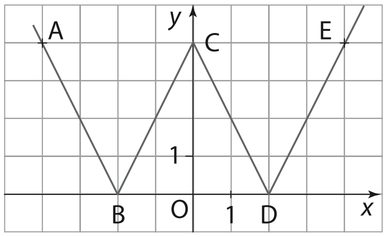
x	0 5
$x \mapsto x+1$	↗
$x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$	↘
$x \mapsto -5 \times \dfrac{1}{x+1}$	↗
$f : x \mapsto 3 - \dfrac{5}{x+1}$	↗

Conclusion : f est strictement croissante sur $[0\,; 5]$.

4. a) $d(x) = f(x) - 3 = -\dfrac{5}{x+1}$.

b) $d(x)$ est du signe contraire de $x + 1$ sur $[0\,; 5]$ donc négatif : la courbe est donc toujours au-dessous de la droite Δ sur $[0\,; 5]$.

23 Narration de recherche



Les équations des droites contenant les segments et demi-droites de la figure sont :

(AB) : $y = -2x - 4$; (BC) : $y = 2x + 4$;
(CD) : $y = -2x + 4$; (DE) : $y = 2x - 4$.

(AB) et (DE) se coupent en C'$(0\,; -4)$, symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses.

Notons g la fonction représentée par la réunion des demi-droites [C'A) et [C'E). La courbe étudiée est donc la représentation graphique de f, avec $f = |g|$

ou $g(x) = \begin{cases} -2x - 4, \text{ si } x \leqslant 0 \\ 2x - 4, \text{ si } x > 0 \end{cases}$

c'est-à-dire $g(x) = |2x| - 4$ et $f(x) = \big||2x| - 4\big|$.

24 Narration de recherche

Notons I le milieu de [AB].

Dans le repère (A, I), les points A, B, C ont pour abscisses, respectivement 0, 2, 3. Notons x l'abscisse du point M.

$MA = \begin{cases} x, \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$, soit $AM = |x|$.

De même, $MB = \begin{cases} x - 2, \text{ si } x \geqslant 2 \\ 2 - x, \text{ si } x < 2 \end{cases}$, soit $MB = |x - 2|$ et

$MC = \begin{cases} x - 3, \text{ si } x \geqslant 3 \\ 3 - x, \text{ si } x < 3 \end{cases}$, soit $MC = |x - 3|$.

On a donc quatre cas à étudier suivant la position de M sur la droite par rapport aux points A, B, et C.

x	0	2	3	
MA	$-x$	x	x	x
MB	$2 - x$	$2 - x$	$x - 2$	$x - 2$
MC	$3 - x$	$3 - x$	$3 - x$	$x - 3$
MA + MB – MC	$-1 - x$	$-1 - x$	$3x - 5$	$x + 1$
MA + MB – MC = 4	$x = -5$	Ø	$x = 3$	$x = 3$

Le problème a donc deux solutions : le point M doit être en C ou en D.

25 TP – Somme de fonctions monotones

2. a) f est croissante et g décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc toutes les deux sont monotones sur cet intervalle.

b) La fonction h semble décroissante sur $]0\,;1[$ puis croissante sur $[1\,;+\infty[$, donc non monotone sur $]0\,;+\infty[$.

c)

x	$-\infty$	-1	0
$f(x)$		↗	
$g(x)$		↘	
$(f+g)(x)$	↗		↘

d)

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$		↗	
$g(x)$		↘	
$(f+g)(x)$	↘		↗

x	$-\infty$	0
$f(x)$	↘	
$g(x)$	↘	
$(f+g)(x)$	↘	

e) La somme de deux fonctions monotones sur un intervalle n'est pas nécessairement monotone sur cet intervalle. En revanche, si elles sont toutes les deux décroissantes, alors il est possible que la somme le soit aussi.

3. a) f et g étant croissantes,
si $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ et $g(a) \leqslant g(b)$,
soit $f(a) + g(a) \leqslant f(b) + g(b)$ et la fonction $f + g$ est aussi croissante.

b) f et g étant décroissantes,
si $a < b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$ et $g(a) \geqslant g(b)$,
soit $f(a) + g(a) \geqslant f(b) + g(b)$ et la fonction $f + g$ est aussi décroissante.

On peut donc énoncer le théorème suivant :
sur un intervalle I, la somme de deux fonctions croissantes est croissante et la somme de deux fonctions décroissantes est décroissante.

c) Plusieurs contre-exemples (**2. b**), **c)** et **d)**) nous permettent d'affirmer que l'énoncé est faux.

4. a) f est la somme de deux fonctions croissantes sur $[0\,;+\infty[$, $x \mapsto 2x + 1$ et $x \mapsto \sqrt{x}$;
elle est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b) g est la somme de deux fonctions décroissantes sur $[1\,;+\infty[$, $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et $x \mapsto -x$;
elle est donc décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

26 TP – Produit de fonctions monotones

2. a) Les trois fonctions sont monotones sur $]0\,;+\infty[$:
f et $f \times g$ sont croissantes, et g est décroissante.

b)

x	$-\infty$	0
$f(x)$	↘	
$g(x)$	↘	
$(f \times g)(x)$	↗	

c)

x	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	
$g(x)$	↘	
$(f \times g)(x)$	↘	

x	$-\infty$	0
$f(x)$	↘	
$g(x)$	↘	
$(f \times g)(x)$	↘	

d) Non, puisque l'on a rencontré des cas dans lesquels les résultats sont contraires.

3. a) f et g étant croissantes,
si $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ et $g(a) \leqslant g(b)$.

b) Un contre-exemple suffit :
$-3 < 2$ et $-2 < 1$ or $(-3) \times (-2) > 2 \times 1$.

c) Non, mais si on ajoute l'hypothèse « elles ne prennent que des valeurs positives », on peut en déduire que la fonction produit est elle aussi croissante (voir l'exercice 74, page 67).

d) Voir une solution du problème ouvert.

EXERCICES Entraînement (page 62)

DE TÊTE

27 f est strictement croissante sur I.

28 f est strictement croissante sur I.

29 f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

30 f est strictement croissante sur I.

31 $x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$,
donc : si $0 < x < y$, alors $\sqrt{2x+3} < \sqrt{2y+3}$ soit $A < B$.

32 $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ est strictement décroissante sur $]-1\,;+\infty[$,
donc : si $0 < x < y$, alors $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} > \dfrac{1}{\sqrt{y+1}}$ soit $A > B$.

33 $x \mapsto \dfrac{1}{2x-5}$ est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$, donc :
si $3 < x < y$, alors $\dfrac{1}{2x-5} > \dfrac{1}{2y-5}$ soit A > B.

34 Sur $[-2\,;0]$, la fonction *valeur absolue* est strictement décroissante, donc :
si $-2 \leqslant x \leqslant 0$, alors $|-2| \geqslant |x| \geqslant |0|$ soit $|x| \in [0\,;2]$.

35

x	-2		0		3
$\lvert x\rvert$	2	↘	0	↗	3

Donc : si $x \in [2\,;3]$, alors $0 \leqslant |x| \leqslant 3$.

36 *Corrigé dans le manuel.*

D'UNE COURBE À L'AUTRE : RECONNAÎTRE

37 f en vert, $-f$ en mauve, $2f$ en bleu et $\dfrac{1}{f}$ en rouge.

38 f en rouge, $-f$ en mauve, $2f$ en bleu et $\dfrac{1}{f}$ en vert.

39 *Corrigé dans le manuel.*

40 La courbe mauve ne correspond à aucune des fonctions car aucune ne prend la valeur 0 pour $x = 2$.

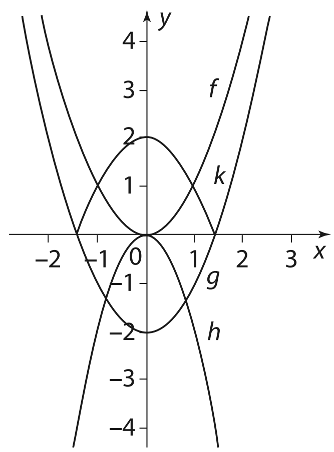
41 Pour $x > 1$, $\sqrt{x} < x < x^2$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x^2}$
et $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

42 $\mathscr{C}$ représente la fonction k ($k(0) = -1$ et $k(1) = 0$).
$\mathscr{C}'$ représente la fonction h ($h(0) = 1$ et $h(1) = 0$).

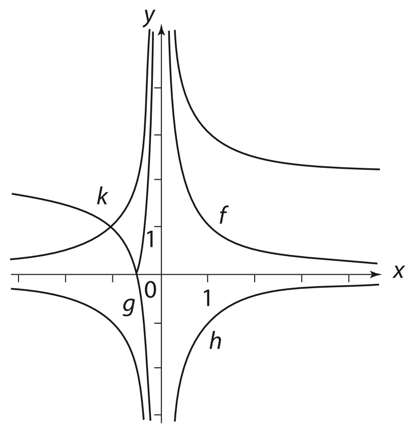
D'UNE COURBE À L'AUTRE : CONSTRUIRE

43 *Corrigé dans le manuel.*

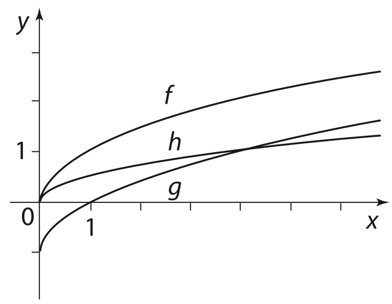
44



45



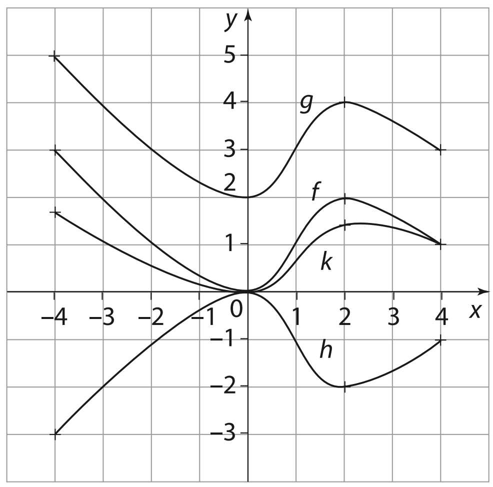
46



47 **1.**

x	-4		0		2		4
$f(x)$	3	↘	0	↗	2	↘	1
$f(x)+2$	5	↘	2	↗	4	↘	3
$-f(x)$	-3	↗	0	↘	-2	↗	-1
$\sqrt{f(x)}$	$\sqrt{3}$	↘	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

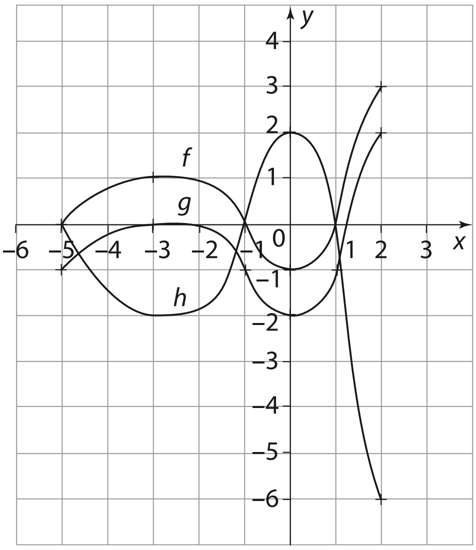
2. a) b)



48 **1.**

x	-5		-3		-1		0		1		2		3
$g(x)$	-1	↗	0	↘	-1	↘	-2	↗	-1	↗	2	↘	1
$h(x)$	0	↘	-2	↗	0	↗	2	↘	0	↘	-6	↗	-2

2. a) b)

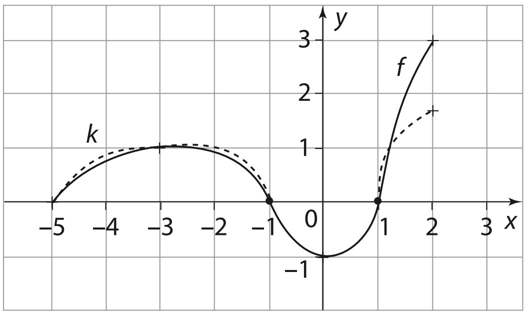


3. a) $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-5\,;-1] \cup [1\,;3]$

b)

x	-5	-3	-1	0	1	2	3
$k(x)$	$0 \nearrow$	$1 \searrow$	0	(hachuré)	$0 \nearrow$	$1 \nearrow$	$\sqrt{3}$

c)

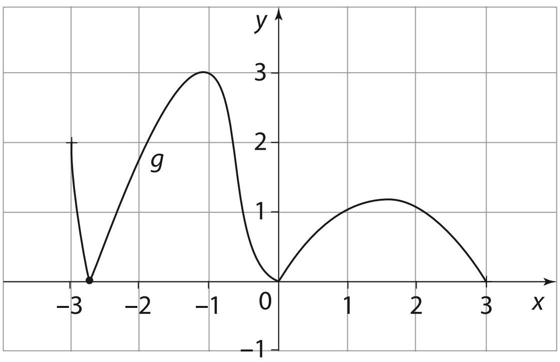


49 **1.**

x	-3	-1	0	1	α	2	3
$f(x)$	$2 \searrow$	$-3 \nearrow$	$0 \searrow$	$-1 \searrow$	$\beta \nearrow$	$-1 \nearrow$	0

avec $\alpha \approx 1{,}5$ et $\beta \approx -1{,}2$.

2. a)



b) La droite d'équation $y = 1$ coupe la représentation de g en 5 points : l'équation $g(x) = 1$ admet donc 5 solutions.

c) Si $m < 0$: pas de solution ;

si $m = 0$: 3 solutions ;

si $0 < m < -\beta$: 5 solutions ;

si $m = \beta$: 4 solutions ;

si $-\beta < m \leqslant 2$: 3 solutions ;

si $2 < m < 3$: 2 solutions ;

si $m = 3$: 1 solution ;

si $m > 3$: pas de solution.

DÉCOMPOSITION ET SENS DE VARIATION

50 $f : x \mapsto x^2 \mapsto x^2 + 3$.

La fonction f est, comme la fonction *carré*, strictement décroissante sur I et strictement croissante sur J.

51 *Corrigé dans le manuel.*

52 $f : x \mapsto x^2 \mapsto x^2 + 3 \mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$

u et $\dfrac{1}{u}$ varient en sens contraires, donc (voir exercices précédents) f est strictement croissante sur I et strictement décroissante sur J.

53 $f : x \mapsto x - 4 \mapsto \sqrt{x-4}$

La fonction $u : x \mapsto x - 4$ est strictement croissante sur I.

Les fonctions u et $\sqrt{u}$ varient dans le même sens : f est strictement croissante sur I.

54 $f : x \mapsto x - 4 \mapsto \sqrt{x-4} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$

La fonction $u : x \mapsto \sqrt{x-4}$ est strictement croissante sur I (voir exercice précédent). u et $\dfrac{1}{u}$ varient en sens contraires donc f est strictement décroissante sur I.

55 $f : x \mapsto |x| \mapsto 2|x| \mapsto 2|x| - 1$

La fonction *valeur absolue* est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Les fonctions u, $2u$ et $2u + 1$ varient dans le même sens ; f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

56 $f : x \mapsto 5 - x \mapsto \sqrt{5-x}$

La fonction $u : x \mapsto 5 - x$ est strictement décroissante sur I.

Les fonctions u et $\sqrt{u}$ varient dans le même sens : f est strictement décroissante sur I.

57 $f : x \mapsto x^2 \mapsto \dfrac{1}{x^2} \mapsto \dfrac{-2}{x^2}$

La fonction *carré* est strictement décroissante sur I et strictement croissante sur J.

u et $\dfrac{1}{u}$ varient en sens contraires, donc $v : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est strictement croissante sur I et strictement décroissante sur J.

v et $-2v$ varient en sens contraires, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

58 **1.** $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$.

2. Comme la fonction *inverse* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

59 **2.** On reconnaît la représentation de la fonction *valeur absolue*.

On peut conjecturer que pour tout nombre réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

3. $\sqrt{x^2}$ est le nombre positif donc le carré est x^2.

$\sqrt{x^2} = x$ si $x \geqslant 0$ et $\sqrt{x^2} = -x$ si $x \leqslant 0$, donc $\sqrt{x^2} = |x|$.

60 Les quatre programmes mènent au même résultat : ils correspondent à la fonction $x \mapsto |2x - 1|$.

61 **1.** $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$.
Le trinôme est du signe du coefficient de x^2 (donc positif) sauf entre ses racines –1 et 3.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. $D =]-\infty\,; -1] \cup [3\,; +\infty[$.
3. $u : x \mapsto x^2 - 2x - 3$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,; -1]$ et strictement décroissante sur $[3\,; +\infty[$.
Les fonctions u et $\sqrt{u}$ varient dans le même sens : f est strictement décroissante sur $]-\infty\,; -1]$ et strictement décroissante sur $[3\,; +\infty[$.
4.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗				↘	

62 **1.** Le discriminant du trinôme $x^2 - 2x + 2$ est négatif ($\Delta = -4$). Le trinôme est constamment du signe du coefficient de x^2, donc positif ($a = 1$).
Il en résulte que f est définie pour tout nombre réel x.
2. $u : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ admet un minimum pour $x = -\dfrac{b}{2a} = 1$.
u est strictement décroissante sur $]-\infty\,; 1]$ et strictement croissante sur $[1\,; +\infty[$.
Les fonctions u et $\sqrt{u}$ varient dans le même sens : f est strictement décroissante sur $]-\infty\,; 1]$ et strictement croissante sur $[1\,; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	1	5	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\sqrt{2}$ ↘	1	↗ $\sqrt{17}$	↗

3. Si $x \in [0\,; 5]$, alors $1 \leqslant \sqrt{x^2 - 2x + 2} \leqslant \sqrt{17}$.

63 **a)** La négation : $\sqrt{a} \geqslant \sqrt{b}$.
b) La fonction *carré* est strictement croissante sur $[0\,; +\infty[$, donc si $\sqrt{a} \geqslant \sqrt{b}$ alors $a \geqslant b$, ce qui contredit l'hypothèse $a < b$.
Conclusion : la négation est fausse, ainsi,
si $0 \leqslant a < b$, alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$,
la fonction *racine carrée* est strictement croissante sur $[0\,; +\infty[$.

64 $f(x) = |2x - 1|$.

```
▼ VARIABLES
  ├ x EST_DU_TYPE NOMBRE
  └ y EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├ LIRE x
  ├ y PREND_LA_VALEUR abs(2*x-1)
  ├ AFFICHER "f(x) = "
  └ AFFICHER y
└ FIN_ALGORITHME
```

65 *Corrigé dans le manuel.*

66 $y_J = \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$ et $y_I = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$.
La fonction *carré* est strictement croissante sur $[0\,; +\infty[$, donc comparer les deux nombres positifs y_J et y_I revient à comparer leurs carrés.

$$y_J^2 - y_I^2 = \frac{a+b}{2} - \frac{a + 2\sqrt{ab} + b}{4} = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{4}$$
$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{4} > 0, \text{ donc } y_J > y_I.$$

67 *Corrigé dans le manuel.*

68 **1.** Dans le triangle MPA rectangle en A :
$$\tan \widehat{AMP} = \frac{PA}{x+1}.$$
Dans le triangle BPA rectangle en A :
$$\tan \widehat{BPA} = \frac{1}{PA}.$$
$\widehat{AMP}$ et $\widehat{BPA}$ ont même complémentaire, $\widehat{APM}$,
donc $\tan \widehat{AMP} = \tan \widehat{BPA}$ soit $\dfrac{PA}{x+1} = \dfrac{1}{PA}$ et $PA = \sqrt{x+1}$.
2. Sur $[0\,; 3]$, la fonction f est strictement croissante, donc si $0 \leqslant x \leqslant 3$, alors $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(3)$,
soit $1 \leqslant PA \leqslant 2$.

69 **1.**

Sommet	A		B		C		D		A
x	0		1		2		3		4
d	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	1	↘	0	↗	1

2. Sur [AB], $d(x) = \sqrt{x^2 + 1}$,
sur [BC], $d(x) = \sqrt{(2 - x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$,
sur [CD], $d(x) = 3 - x$,
sur [DA], $d(x) = x - 3$.
3. Pour $x \in [0\,; 1]$, la fonction $u : x \mapsto x^2 + 1$ varie dans le même sens que la fonction *carré*, elle est strictement croissante. u et $\sqrt{u}$ varient dans le même sens, donc d est strictement croissante.
– Pour $x \in [1\,; 2]$, $x^2 - 4x + 5$ est strictement positif ($\Delta < 0$ et $a > 0$). Le minimum est atteint pour $x = 2$, donc sur $[1\,; 2]$, la fonction $v : x \mapsto x^2 - 4x + 5$ est strictement décroissante. v et $\sqrt{v}$ varient dans le même sens, donc d est strictement décroissante.
– Pour $x \in [2\,; 3]$, d a le même sens de variation que la fonction affine $x \mapsto 3 - x$: elle est strictement décroissante.
– Pour $x \in [3\,; 4]$, d a le même sens de variation que la fonction affine $x \mapsto x - 3$: elle est strictement croissante.

AVEC LES TICE

70 **1. b)** Il semble que pour tout $x > -2$, $f(x) < 2$.
c) On peut conjecturer la stricte croissance de f sur $]-2\,; +\infty[$.
2. a) Pour tout nombre x de $]-2\,; +\infty[$,
$f(x) = \dfrac{2(x+2) - 5}{x+2}$ soit $f(x) = 2 - \dfrac{5}{x+2}$.

b) Pour tout nombre x de $]-2\,;+\infty[$,

$x+2>0$ donc $\dfrac{5}{x+2}>0$ et $f(x)<2$.

c) Sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$:

$x\mapsto x+2$ est strictement croissante, donc

$x\mapsto\dfrac{1}{x+2}$ est strictement décroissante, soit

$x\mapsto -5\times\dfrac{1}{x+2}$ est strictement croissante, et

$x\mapsto 2-\dfrac{5}{x+2}$ est strictement croissante.

ROC Restitution organisée de connaissances

71 **1.** Sur I, $u : x\mapsto f(x)+k$ et f varient dans le même sens, donc u est strictement croissante.

Sur I, u et $\dfrac{1}{u}$ varient en sens contraires :

la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{f(x)+k}$ est donc strictement décroissante.

2. Sur I, f est strictement croissante et $f(1)=0$, donc pour tout nombre x de I, $f(x)\geqslant 0$.

g est donc strictement décroissante sur I :

pour tout $x\geqslant 1$, $g(x)\leqslant g(1)=1$.

Prendre toutes les initiatives

72 f est la somme des deux fonctions $x\mapsto\sqrt{x}$ et $x\mapsto-\dfrac{1}{x}$, strictement croissantes sur $[0\,;+\infty[$: elle est donc elle-même strictement croissante (voir TP ex. 25, p. 60).

73 $\text{PM}=y_{\text{M}}=\dfrac{\sqrt{x_{\text{A}}}}{2}$ et $\text{PN}=y_{\text{N}}=\sqrt{\dfrac{x_{\text{A}}}{2}}=\dfrac{\sqrt{x_{\text{A}}}}{\sqrt{2}}$.

$\dfrac{\text{PM}}{\text{PN}}=\dfrac{\sqrt{x_{\text{A}}}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_{\text{A}}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICES Approfondissement (page 67)

74 **1.** f et g étant croissantes et positives sur I,
si $a<b$, alors $0\leqslant f(a)\leqslant f(b)$ et $0\leqslant g(a)\leqslant g(b)$.
Multiplier par un nombre positif conserve l'ordre, donc :
si $a<b$, alors $0\leqslant f(a)\times g(a)\leqslant f(b)\times g(a)\leqslant f(b)\times g(b)$,
soit $f(a)\times g(a)\leqslant f(b)\times g(b)$.
La fonction $f\times g$ est donc aussi croissante sur l'intervalle I.

2. Le produit de deux fonctions positives et décroissantes sur un intervalle I est aussi une fonction décroissante sur I.
f et g étant décroissantes et positives sur I,
si $a<b$, alors $0\leqslant f(b)\leqslant f(a)$ et $0\leqslant g(b)\leqslant g(a)$,
Multiplier par un nombre positif conserve l'ordre, donc :
si $a<b$, alors $0\leqslant f(b)\leqslant g(b)\leqslant f(a)\times g(b)\leqslant f(a)\times g(a)$,
soit $f(b)\times g(b)\leqslant f(a)\times g(a)$.
La fonction $f\times g$ est aussi décroissante sur l'intervalle I.

75 **1.** $\text{AB}=\sqrt{x}-x$.

2.

x	0		1
$g(x)$	0	↗ ↘	0

3. $\dfrac{1}{4}-g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2=\left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{x}\right)^2$,

donc pour tout x de $[0\,;1]$, $\dfrac{1}{4}-g(x)\geqslant 0$, soit $g(x)\leqslant\dfrac{1}{4}$.

D'autre part : $g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\sqrt{\dfrac{1}{4}}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$.

4. g atteint son maximum $\dfrac{1}{4}$ pour $x=\dfrac{1}{4}$: le segment [AB] a pour longueur maximale $\dfrac{1}{4}$ lorsque x parcourt $[0\,;1]$.

76 **1.** La seule opération qui pose problème est le calcul de l'inverse de x qui n'a de sens que pour x non nul.

2. $x>0$ donc $\dfrac{1}{x}>0$ et $f(x)>x$: la courbe $\mathscr{C}$ est toujours située en dessous de la droite d d'équation $y=x$.

3. $\text{AB}=y_{\text{B}}-y_{\text{A}}=x-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance AB est de plus en plus « petite », la courbe $\mathscr{C}$ est de plus en plus « proche » de la droite d.

Remarque : on peut introduire le vocabulaire : « d est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ ».

77 **1.** La parabole représentant f est en vert.

2. 3.

```
▼ VARIABLES
  ├x EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├y EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├f_x EST_DU_TYPE NOMBRE
  └g_x EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├LIRE x
  ├LIRE y
  ├f_x PREND_LA_VALEUR pow(x,2)-5*x+4
  ├g_x PREND_LA_VALEUR (x-2)/x
  ▼ SI (y>=f_x et y<=g_x) ALORS
     ├DEBUT_SI
     ├AFFICHER "Le point est à l'intérieur"
     ├FIN_SI
     ▼ SINON
        ├DEBUT_SINON
        ├AFFICHER "Le point est à l'extérieur"
        └FIN_SINON
└FIN_ALGORITHME
```

78 **1. a)** $\text{AM}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$.

b) $\text{AM}=\sqrt{x^2+(x-5)^2}=\sqrt{2x^2-10x+25}$.

2. a) Le trinôme $2x^2-10x+25$ est strictement positif quel que soit le nombre x ($\Delta<0$ et $a=2$).
$f(x)$ existe quel que soit le nombre x.

b)

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$u(x)$		↘	$\frac{25}{2}$	↗	

c) u et $\sqrt{u}$ ont même sens de variation.

d) La valeur minimale prise par AM est $\sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3{,}53$.

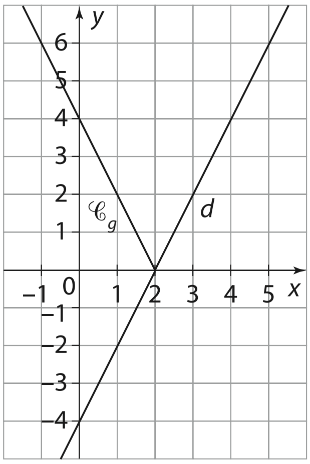
79 **2. a)** $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$

donc $|f(x)| = \begin{cases} -2+4 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x-4 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

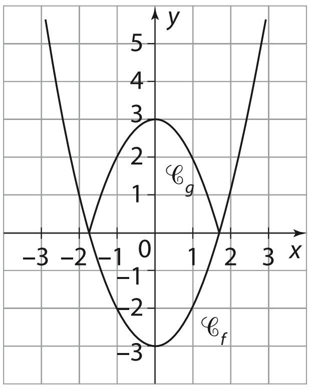
b) Si $x \in]-\infty\,;2]$, $g(x) = -f(x)$, donc le point de coordonnées $(x\,;g(x))$ est le symétrique du point de coordonnées $(x\,;f(x))$ qui appartient à la droite représentant f.

Si $x \in [2\,;+\infty[$, $g(x) = f(x)$, donc le point de coordonnées $(x\,;g(x))$ appartient à la droite représentant f.

c)



80

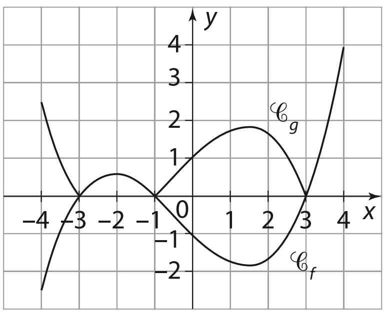


81 Les coordonnées des points des deux demi-droites vérifient :

$$\begin{cases} y \geqslant 0 \\ y = -x+3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y \geqslant 0 \\ y = x-3 \end{cases}$$

ce qui peut se résumer par $y = |x-3|$: $h(x) = |x-3|$.

82



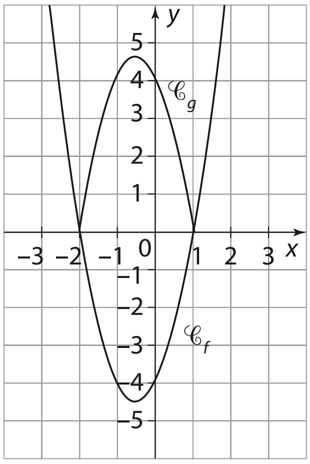
83 **1.** $f(x) = 2(x-1)(x+2)$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$-\frac{9}{2}$	↗	

2.

x	$-\infty$		2	$-\frac{1}{2}$	1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3.



84 **1. a)** $\sqrt{a}$ est positif, donc $\sqrt{a} = b$ implique $b \geqslant 0$.

D'autre part, l'égalité $\sqrt{a} = b$ implique celle des carrés $a = b^2$.

b) $a = b^2$ implique a positif comme b^2.

L'égalité des nombres positifs $a = b^2$ implique celle de leurs racines carrées $\sqrt{a} = \sqrt{b^2}$, et comme b est positif, $\sqrt{a} = b$.

c) « $\sqrt{a} = b$ » équivaut à « $b \geqslant 0$ et $a = b^2$ ».

2. $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$ implique a et b positifs, et la fonction *carré* étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, $a \leqslant b$.

Réciproquement, si $0 \leqslant a \leqslant b$, la fonction *racine carrée* étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

« $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$ » équivaut à « $0 \leqslant a \leqslant b$ ».

3. « $\sqrt{a} \leqslant b$ » équivaut à « $b \geqslant 0$ et $0 \leqslant a \leqslant b^2$ ».

85 $\sqrt{x-1} = x-3 \Leftrightarrow x-1 = (x-3)^2$ et $x \geqslant 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$ et $x \geqslant 3$

$\Leftrightarrow (x = 2$ ou $x = 5)$ et $x \geqslant 3$.

D'où $\mathscr{S} = \{5\}$.

86 $\sqrt{x+7} = x+1 \Leftrightarrow x+7 = (x+1)^2$ et $x \geqslant -1$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$ et $x \geqslant -1$

$\Leftrightarrow (x = 2$ ou $x = -3)$ et $x \geqslant -1$.

D'où $\mathscr{S} = \{2\}$.

87 $t + \sqrt{1-2t} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1-2t} = 2-t$

$\Leftrightarrow 1-2t = (2-t)^2$ et $t \leqslant 2$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t + 3 = 0$ et $t \leqslant 2$

$\Delta < 0$ donc $\mathscr{S} = \varnothing$.

88 $\sqrt{1-u} = u-1 \Leftrightarrow 1-u = (u-1)^2$ et $u \geqslant 1$

$\Leftrightarrow u^2 - u = 0$ et $u \geqslant 1$

$\Leftrightarrow (u = 0$ ou $u = 1)$ et $u \geqslant 1$.

D'où $\mathscr{S} = \{1\}$.

89 $\sqrt{x} \geqslant \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 0 \leqslant 2x-1 \leqslant x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1.$

D'où $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

90 $\sqrt{2x+1} \leqslant 1 + \frac{x}{3} \Leftrightarrow 0 \leqslant 2x+1 \leqslant \left(1+\frac{x}{3}\right)^2$ et $x \geqslant -3$

$\Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$ et $x^2 - 12x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}$ et ($x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 12$).

D'où $\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{2}\,;0\right] \cup [12\,;+\infty[$.

91 $4 + \sqrt{6-x} \leqslant x \Leftrightarrow \sqrt{6-x} \leqslant x-4$

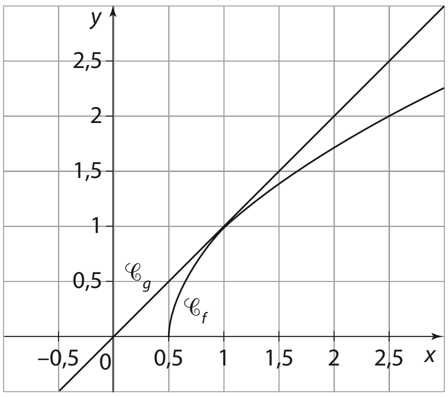
$\Leftrightarrow 0 \leqslant 6-x \leqslant (x-4)^2$ et $x \geqslant 4$

$\Leftrightarrow 4 \leqslant x \leqslant 6$ et $x^2 - 7x + 10 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 4 \leqslant x \leqslant 6$ et ($x \leqslant 2$ ou $x \geqslant 5$).

D'où $\mathcal{S} = [5\,;6]$.

92 **1.**



2. En commun, le point de coordonnées (1 ; 1) et peut-être d'autres !

3. $\sqrt{2x-1} = x \Leftrightarrow 2x-1 = x^2$ et $x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ et $x \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ et $x \geqslant 0$.

Une seule solution 1 et donc un seul point commun, de coordonnées (1 ; 1).

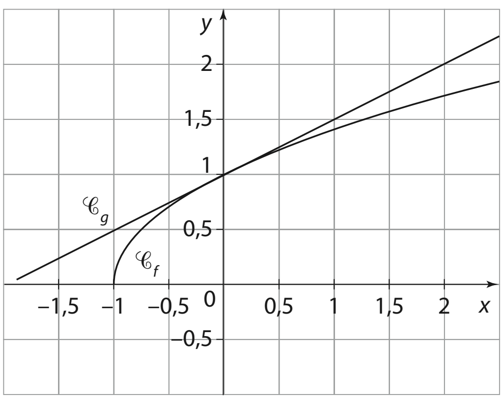
93 **1. a)** x étant supérieur à -1, comparer les deux nombres positifs $\sqrt{1+x}$ et $1 + \frac{x}{2}$ revient à comparer leurs carrés $1 + x$ et $1 + x + \frac{x^2}{4}$.

Pour tout x ($x \geqslant -1$), $\frac{x^2}{4}$ est positif, donc $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$.

b) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow 1 + x = 1 + x + \frac{x^2}{4}$ et $1 + \frac{x}{2} \geqslant 0$.

Donc une seule solution : $x = 0$.

2. a)

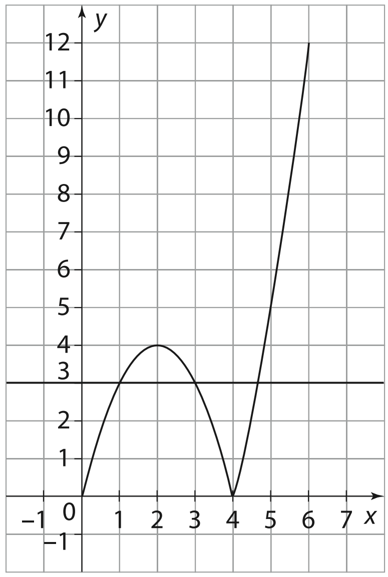


b) $\mathscr{C}_f$ et d sont tangentes au point de coordonnées (0 ; 1).

94 **1.** Si N ∈ [AC] : $0 \leqslant x \leqslant 4$ et $f(x) = x(4-x)$.

Si N ∈ [AD] : $4 \leqslant x \leqslant 6$ et $f(x) = x(x-4)$.

2.



3. Graphiquement, l'aire du rectangle semble supérieure à 3 lorsque $x \in [1\,;3]$ et lorsque $x \geqslant \alpha$ avec $\alpha \approx 4{,}6$.

95 **2.** Le périmètre semble atteindre un maximum de 5 pour x compris entre 0,45 et 0,55.

3. a) Notons H le point de coordonnées (x ; 0), projeté orthogonal de M sur (OA).

$MH^2 = 1 - x^2$, donc $y_M = MH = \sqrt{1-x^2}$.

$AM^2 = 1 - x^2 + (1-x)^2 = 2 - 2x$, $AM = \sqrt{2(1-x)}$.

$P(x) = AB + 2AM + MN = 2 + 2x + 2\sqrt{2(1-x)}$.

$P(x) = 5 \Leftrightarrow 2 + 2x + 2\sqrt{2(1-x)} = 5$.

$\Leftrightarrow \sqrt{2(1-x)} = \frac{3}{2} - x$ (E).

b) Si $x \in [0\,;1]$, alors $2(1-x) \geqslant 0$ et $\frac{3}{2} - x \geqslant 0$.

L'égalité de nombres positifs équivaut à celle de leurs carrés (voir aussi l'exercice 84, page 68).

Donc résoudre (E) revient à résoudre dans [0 ;1] l'équation :

$$2(1-x) = \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 \qquad \text{(E')}.$$

(E') $\Leftrightarrow 2 - 2x = x^2 - 3x + \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$

L'équation a une unique solution $\frac{1}{2}$ (qui appartient bien à [0 ;1]).

En conclusion, le périmètre atteint ce qui semble être son maximum 5 pour $x = 0{,}5$.

Prendre toutes les initiatives

96 L'égalité $|x| + |y| = 1$ implique

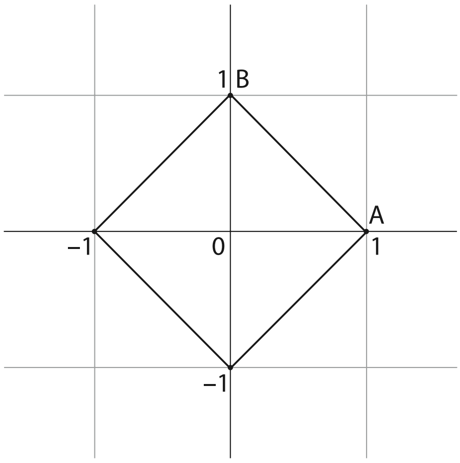
$-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Le repère étant orthonormé, l'ensemble des points M cherché est donc à l'intérieur d'un carré C de centre O et de côté 2 (les côtés étant parallèles aux axes).

Plaçons-nous dans le quart de plan défini par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

L'équation $|x| + |y| = 1$ s'écrit alors $x + y = 1$ et les points M

cherchés sont les points intérieurs à C qui appartiennent à la droite d'équation $x + y = 1$.
C'est le segment [AB], où A et B ont pour coordonnées respectivement $(0\,;1)$ et $(1\,;0)$.
En étudiant de la même façon dans chacun des trois autres quarts de plan, on obtient trois segments.
L'ensemble cherché est le pourtour d'un carré de centre O, dont les sommets appartiennent aux axes et dont les diagonales sont de mesure 2.



97 $AB = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{x^2+4}$ et $BC = |x-1|$.
Étudions les trois cas possibles :
– *1er cas :* le sommet principal est A.
$AB = AC \Leftrightarrow x^2 + 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1$.
Deux solutions, $x = 1$ et $x = -1$, donc deux points : B (sans intérêt…) et D $(-1\,;0)$.
– *2e cas :* le sommet principal est B.
$AB = BC \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{5} \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{5}$ ou $x - 1 = -\sqrt{5}$.
Deux solutions, $x = 1 + \sqrt{5}$ ou $x = 1 - \sqrt{5}$, donc deux points : $E(1+\sqrt{5}\,;0)$ et $F(1-\sqrt{5}\,;0)$.
– *3e cas :* le sommet principal est C.
$AC = BC \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4} = |x-1| \Leftrightarrow x^2 + 4 = (x-1)^2$
$\Leftrightarrow 2x + 3 = 0$.
Une solution $x = -\frac{3}{2}$, donc un point : $G\left(-\frac{3}{2}\,;0\right)$.

98 En terme de distance, le problème peut s'énoncer ainsi :
pour $x \geqslant 0$, le point $M(x\,;\sqrt{x})$ peut-il être à une distance inférieure ou égale à $\frac{\sqrt{7}}{2}$ du point A ?
$AM^2 = (x-2)^2 + x = x^2 - 3x + 4$.
$AM \leqslant \frac{\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 \leqslant \frac{7}{4}$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} \leqslant 0$
$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leqslant 0$.
Cette inéquation admet une unique solution $x = \frac{3}{2}$ donc un seul point commun.
On ne peut pas dire que le cercle coupe la courbe, mais les deux sont tangents au point de coordonnées $\left(\frac{3}{2}\,;\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

EXERCICES Travail en autonomie (page 70)

A **1.**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

2. a) Pour tout nombre x, $f(x)$ est supérieur ou égal à 2 donc positif.
b) u et $\sqrt{u}$ ont même sens de variation.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\sqrt{3}$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

c) Si $x \in [0\,;2]$, alors $g(x) \in \left[\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\right]$.

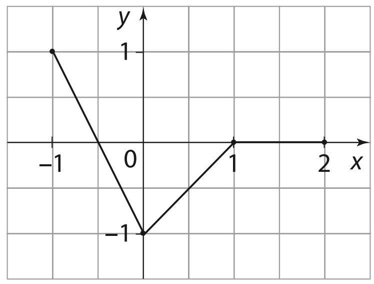
B **1.**

x	$-\infty$		-1		0		2		3
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↘	0	↗	4	↘	0

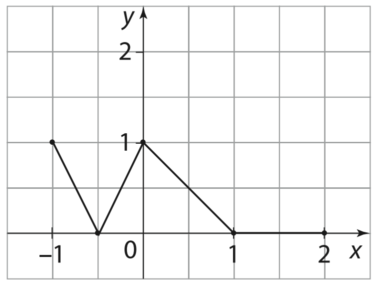
2.

x	$-\infty$		-1		0		2		3
$g(x)$	$+\infty$	↘	8	↘	4	↗	8	↘	4
$h(x)$	$-\infty$	↗	-4	↗	0	↘	-4	↗	0
$k(x)$	$+\infty$	↘	2	↘	0	↗	2	↘	0

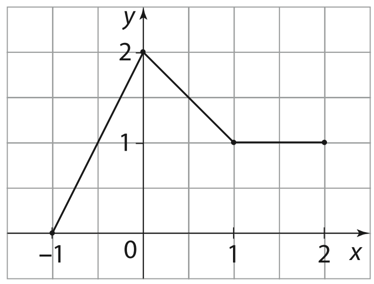
C • $g(x) = -f(x)$



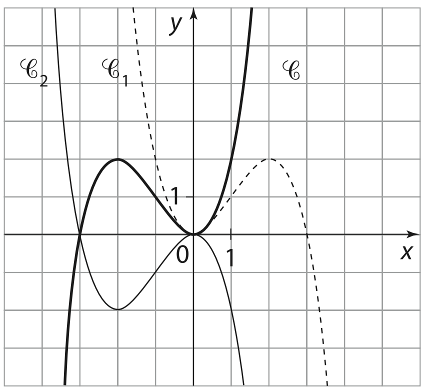
• $h(x) = |f(x)|$



• $k(x) = f(x) + 1$



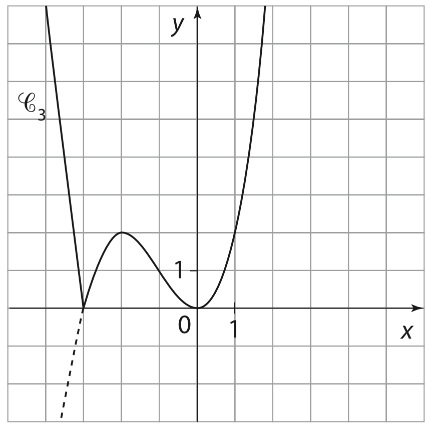
D **1. a)**



b) $f_1(x) = f(-x)$ et $f_2(x) = -f(x)$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f_1(x)$		↘		↘	0	↗	2	↘	
$f_2(x)$		↘	-2	↗	0	↘		↘	

2. a) $g(x) = |f(x)|$



b)

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

E **1.** Le point M a pour coordonnées $(x\,;x+2)$; donc :

$$OM = \sqrt{x^2 + (x+2)^2} = \sqrt{2x^2 + 4x + 4}.$$

2. a) Le discriminant du trinôme $x^2 + 2x + 2$ est négatif ($\Delta = -4$) donc le trinôme garde un signe constant, celui du coefficient du terme en x^2. Il est donc constamment positif.

b)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3. a) $OM = \sqrt{2} \times f(x)$ et comme pour tout x, $f(x) \geqslant 1$, il en résulte pour tout M, $OM \geqslant \sqrt{2}$.

b) La perpendiculaire à la droite d passant par O coupe d en H. [OH] est la diagonale d'un carré de côté 1 : donc $OH = \sqrt{2}$.