CHAPITRE 8 Angles orientés et trigonométrie

ACTIVITÉS (page 193)

Activité 1

2 **c)** La mesure affichée de α est 1 radian.
d) $\ell = \pi$ et α vaut π radians.

Activité 2

2 **a)** Flèche de $\overrightarrow{OE}$ vers $\overrightarrow{OF}$: la mesure est positive.
b) Flèche de $\overrightarrow{OF}$ vers $\overrightarrow{OE}$: la mesure est négative.
c) Si F est diamétralement opposé à E, on affiche π radians.
d) La mesure de $\overrightarrow{OE}$ avec $\overrightarrow{OF}$ devient négative.

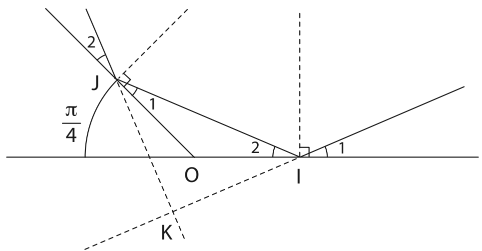
PROBLÈME OUVERT

Avec les angles géométriques :

$\widehat{IOJ} = \dfrac{3\pi}{4}$ donc $\widehat{I_2} + \widehat{J_1} = \dfrac{\pi}{4}$; $\widehat{KJI} = 2\widehat{J_1}$ et $\widehat{KIJ} = 2\widehat{I_2}$;

donc $\widehat{KJI} + \widehat{KIJ} = 2(\widehat{I_2} + \widehat{J_1}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Il en résulte de $\widehat{IKJ} = \dfrac{\pi}{2}$, donc les rayons sont perpendiculaires.



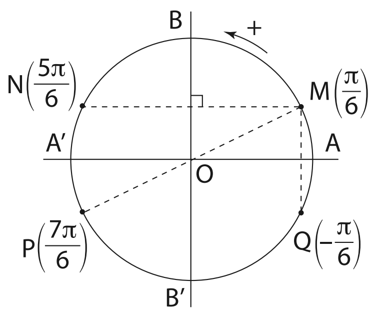
EXERCICES Application (page 197)

1 M a pour coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$; donc :

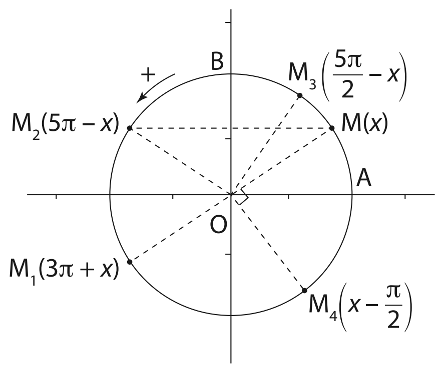
$N\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$,

$P\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$,

$Q\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; -\dfrac{1}{2}\right)$.



2 **2.** $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\sin(3\pi + x) = -\sin x$;
$\cos(5\pi - x) = -\cos x$; $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin x$.



Donc :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\sin(3\pi+x)+\cos(5\pi-x)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

3 **a)** $\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)+\sin x$

$= -\sin x+\sin x-\cos x+\sin x=\sin x-\cos x.$

b) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos(x+\pi)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin(x-\pi)$

$= -\cos x+\cos x+\sin x+\sin x=2\sin x.$

4 **2. a)** $\sin^2 x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$ et $\sin x<0$;

donc $\sin x=-\frac{4}{5}$.

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x=\frac{3}{5}$.

c) $\cos(\pi-x)=-\cos x=-\frac{3}{5}$.

d) $\sin(\pi+\pi)=-\sin x=\frac{4}{5}$.

5 **a)** $\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}$ donc $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$.

b) $\sin x=\sin\frac{5\pi}{4}$ donc $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$.

c) $\sin x=\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ donc $x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ou $\frac{11\pi}{6}+2k\pi$.

d) $\cos x=\cos\frac{5\pi}{6}$ donc $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ou $-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.

6 **a)** $\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$; $\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$.

b) $\sin x=\sin\frac{\pi}{6}$; $\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$.

c) $\cos x=\cos\frac{3\pi}{4}$; $\mathcal{S}=\left\{\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$.

7 **a)** $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\mathcal{S}=\left\{-\frac{\pi}{4};-\frac{3\pi}{4}\right\}$.

b) $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$; $\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right\}$.

c) $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $\mathcal{S}=\left\{-\frac{\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}\right\}$.

d) $\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}$; $\mathcal{S}=\left\{\frac{2\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}\right\}$.

8 **1. a)** $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$;

donc : $\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}$.

b) $\mathcal{S}=\left\{\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right\}$.

2. $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\sin x=\frac{\pi}{3}$. Donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$.

9 **a)** $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\frac{2\pi}{3}$.

b) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BE})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE})+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$.

c) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BO})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO})+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$.

d) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OE})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BO})=\frac{2\pi}{3}$.

10 **a)** $\widehat{ACB}=\frac{\pi}{6}$; donc : $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=-\frac{\pi}{6}$.

b) $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})+\pi=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}$.

Or : $\frac{7\pi}{6}=2\pi-\frac{5\pi}{6}$; donc la mesure principale est $-\frac{5\pi}{6}$.

c) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{2}$.

11 **a)** $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=-\frac{5\pi}{12}$.

b) $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$.

c) $(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{EB})=(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{HC})=(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HC})+\pi=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}$.

d) $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{CH})=(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{BE})=(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB})+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$.

12 **1.** D'après la relation de Chasles :

$(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC})=(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC})$.

Or $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC})=(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})$.

D'où le résultat.

2. $(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{BA})=\pi$; $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=-\frac{2\pi}{3}$; $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})=\frac{\pi}{4}$.

Donc : $(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC})=\pi-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{12\pi-8\pi+3\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}$.

La mesure principale est donc $\frac{7\pi}{12}$.

13 **1.** D'après la relation de Chasles :

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})$.

Or : $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+\pi$ et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})+\pi$;

donc :

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})+2\pi$

ou $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$.

2. $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}=\frac{7\pi}{10}$.

C'est la mesure principale de $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB})$.

14 **1.** $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})$.

Or $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})+\pi$.

D'où le résultat.

2. $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB})=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{-4\pi+3\pi+12\pi}{12}=\frac{11\pi}{12}$.

C'est la mesure principale.

15 **1.** $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})=(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})$.

Or $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})=-(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})=-(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

D'où le résultat.

2. a) (AD) $\perp$ (AE) $\Leftrightarrow(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

D'où : $\frac{\pi}{2}+k\pi=-b-a+c$ soit $c-a-b=\frac{\pi}{2}\quad[\pi]$.

b) $\frac{2\pi}{5}-\frac{7\pi}{12}-\frac{4\pi}{3}=\frac{24\pi-35\pi-80\pi}{60}$

$=-\frac{91\pi}{60}=-\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{60}$,

soit $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{60}\quad[\pi]$.

Donc ces droites ne sont pas perpendiculaires.

EXERCICES Activités de recherche (page 202)

20 **Angles orientés et parallélisme**

• ***L'outil :***

– La relation de Chasles.

• ***L'objectif :***

– Prouver un parallélisme à l'aide des angles orientés.

1. a) $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{FG}) = (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG})$.

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CE}) + (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{FG})$

soit $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}) + \pi + \pi$

donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG}) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{FG}) = -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} = 0$, donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires et de même sens.

Les droites (AH) et (FG) sont donc parallèles.

21 **Lignes trigonométriques d'angles associés**

• ***L'outil :***

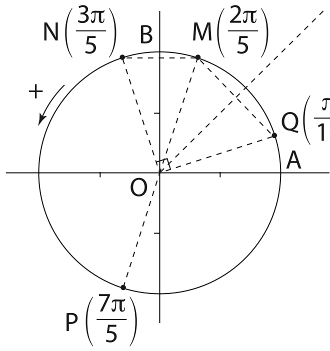
– Lignes trigonométriques d'angles associés.

• ***L'objectif :***

– Calculer un sinus et un cosinus à l'aide des angles associés.

1. a) $\pi - \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{3\pi}{5}$; $\pi + \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{7\pi}{5}$; $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\pi}{10}$.

b)



c) $\cos\dfrac{3\pi}{5} = -\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{5} = \sin\dfrac{2\pi}{5}$.

$\cos\dfrac{7\pi}{5} = -\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{5} = -\sin\dfrac{2\pi}{5}$.

$\cos\dfrac{\pi}{10} = \sin\dfrac{2\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{\pi}{10} = \cos\dfrac{2\pi}{5}$.

2. a) $\sin^2\dfrac{2\pi}{5} = 1 - \left(\dfrac{(\sqrt{5}-1)}{16}\right)^2 = \dfrac{10+2\sqrt{5}}{16}$.

Or $\sin\dfrac{2\pi}{5} > 0$, donc $\sin\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

b) En remplaçant respectivement $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ par leurs valeurs, on trouve le cosinus et le sinus de $\dfrac{3\pi}{5}$, $\dfrac{7\pi}{5}$ et $\dfrac{\pi}{10}$.

22 **Utiliser les angles pour démontrer**

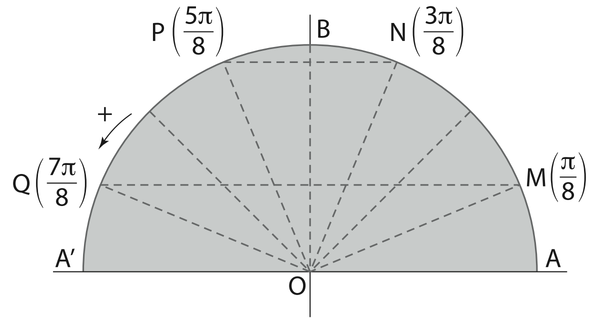
• ***L'outil :***

– Lignes trigonométriques des angles associés.

• ***L'objectif :***

– Simplifier l'écriture d'une expression à l'aide des angles associés.

1. a), b), c)

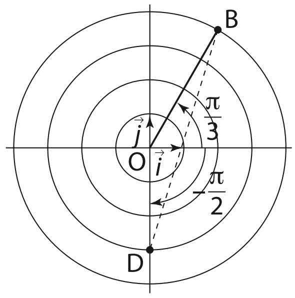


d) $\sin\dfrac{3\pi}{8} = \cos\dfrac{\pi}{8}$; $\sin\dfrac{5\pi}{8} = \sin\dfrac{3\pi}{8} = \cos\dfrac{\pi}{8}$; $\sin\dfrac{7\pi}{8} = \sin\dfrac{\pi}{8}$.

2. $S = \sin^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{\pi}{8} + \sin^2\dfrac{\pi}{8}$.

$S = 2\left[\cos^2\dfrac{\pi}{8} + \sin^2\dfrac{\pi}{8}\right] = 2$.

23 **Narration de recherche**



Dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$,

D a pour coordonnées $(0\,;-3)$ et $B(2\,;2\sqrt{3})$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{DB}$ a pour coordonnées $(2\,;2\sqrt{3}+3)$.

Il en résulte que :

$DB^2 = 4 + (2\sqrt{3}+3)^2$

$= 4 + 12 + 12\sqrt{3} + 9$

$= 25 + 12\sqrt{3}$ et $DB = \sqrt{12\sqrt{3}+25} \approx 6{,}77$ (en km).

DB > 6,5 donc l'observateur placé en D n'aperçoit pas l'objet en B.

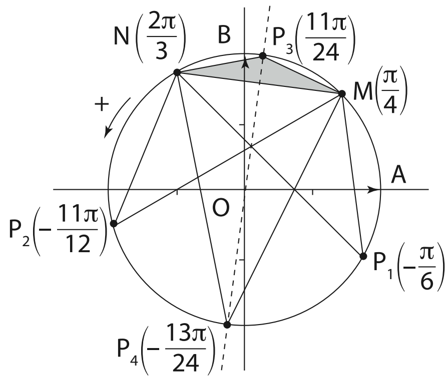
24 **Narration de recherche**

1. Il existe quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 sur $\mathscr{C}$ pour lesquels le triangle MNP est isocèle.

NMP_1 isocèle de sommet M ;

MNP_2 isocèle de sommet N ;

MP_3N et MP_4N de sommets respectifs P_3 et P_4.



2. a) P_1 est le symétrique de N par rapport à (OM) donc :

$(\vec{i}, \overrightarrow{OP_1}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP_1}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})$

$(\vec{i}, \overrightarrow{OP_1}) = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{ON}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

$= 2(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) - (\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6}$.

b) $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OP_2}\right) = \left(\vec{i}, \overrightarrow{ON}\right) + \left(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP_2}\right) = \left(\vec{i}, \overrightarrow{ON}\right) + \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right)$

$= 2\left(\vec{i}, \overrightarrow{ON}\right) - \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$

$\left(\vec{i}, \overrightarrow{OP_2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}$ et la mesure principale est $-\frac{11\pi}{12}$.

c) $\widehat{MOP_3} = \frac{1}{2}\widehat{MON} = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{24}$;

donc $\widehat{AOP_3} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{24} = \frac{11\pi}{24}$ et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OP_3}\right) = \frac{11\pi}{24}$.

• $\widehat{MOP_4} = \pi - \frac{5\pi}{24} = \frac{19\pi}{24}$;

donc $\widehat{AOP_4} = \frac{19\pi}{24} - \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{24}$ et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OP_4}\right) = -\frac{13\pi}{24}$.

25 **TP – De l'intérêt des angles orientés. Utiliser la relation de Chasles**

2. Il semble que les droites (AM) et (FB) restent perpendiculaires quel que soit le cas de figure.

3. a) $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}\right) = -\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}\right)$ car la symétrie par rapport à Δ change la mesure de l'angle en son opposée.

B et C sont symétriques par rapport à (AD),

donc $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF}\right) = -\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CF}\right)$.

b) $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BF}\right) = -\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right) - \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CF}\right)$

$= \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right) - \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CF}\right)$

$= \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) - \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CF}\right) + \pi$

$= \frac{\pi}{2} - \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CF}\right)$.

c) Les points C, M, F sont alignés, et les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires de même sens ou de sens contraires, donc : $\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CF}\right) = 0$ ou $\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CF}\right) = \pi$.

d) Il résulte des questions précédentes que :

$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BF}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BF}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Donc les droites (AM) et (BF) sont perpendiculaires.

EXERCICES Entraînement (page 205)

DE TÊTE

26 **a)** $(\vec{v}, \vec{u}) = -\frac{\pi}{3}$.

b) $(-\vec{u}, \vec{v}) = \frac{4\pi}{3}$.

c) $(-\vec{v}, \vec{u}) = \frac{2\pi}{3}$.

27 $(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

28 $(\vec{u}, \vec{t}) = \frac{6\pi}{6} = \pi$; les vecteurs sont colinéaires.

29 $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $\left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{5\pi}{12}$.

30 **1.** À N, on associe $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$.

2. À P, on associe $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

31 **a)** $\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}\right) = -\frac{5\pi}{12}$.

b) $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

c) $\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{ON}\right) = -\frac{11\pi}{12}$.

32 **a)** $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{7\pi}{12}$.

b) $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{11\pi}{12}$.

ANGLES ORIENTÉS

33 **1.** À M, on associe $\frac{5\pi}{4}$; à N, on associe $\frac{11\pi}{6}$ et à P, on associe $\frac{2\pi}{3}$.

2. a) À M, on associe $-\frac{3\pi}{4}$; à N, on associe $-\frac{\pi}{6}$ et à P, on associe $\frac{2\pi}{3}$.

b) À M, on associe $\frac{5\pi}{4}$; à N, on associe $-\frac{\pi}{6}$ et à P, on associe $\frac{2\pi}{3}$.

34 *Corrigé dans le manuel.*

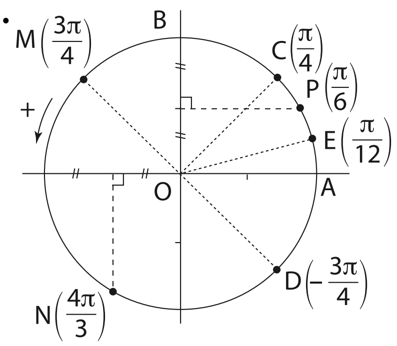
35 **1.**

```
    DEBUT_SINON
    TANT_QUE (x<-Math.PI) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
        x PREND_LA_VALEUR x+2*Math.PI
        k PREND_LA_VALEUR k+1
        FIN_TANT_QUE
    a PREND_LA_VALEUR 2*k
    AFFICHER «x=»
    AFFICHER x
    AFFICHER «–»
    AFFICHER a
    AFFICHER «*PI»
    FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

2.

```
VARIABLES
    x EST_DU_TYPE NOMBRE
    k EST_DU_TYPE NOMBRE
    a EST_DU_TYPE NOMBRE
    b EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    LIRE x
    k PREND_LA_VALEUR 0
    b PREND_LA_VALEUR Math.PI
    SI (x==b) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER «x=Math.PI»
        FIN_SI
        SINON
            DEBUT_SINON
            SI (x>b) ALORS
                DEBUT_SI
                TANT_QUE (x>b) FAIRE
                    DEBUT_TANT_QUE
                    x PREND_LA_VALEUR
                    x-2*Math.PI
                    k PREND_LA_VALEUR k+1
                    FIN_TANT_QUE
                a PREND_LA_VALEUR 2*k
                AFFICHER «x=»
                AFFICHER x
                AFFICHER «+»
                AFFICHER a
                AFFICHER «*PI»
                FIN_SI
                SINON
                    DEBUT_SINON
                    TANT_QUE (x<=-b) FAIRE
                        DEBUT_TANT_QUE
                        x PREND_LA_VALEUR
                        x+2*Math.PI
                        k PREND_LA_VALEUR k+1
                        FIN_TANT_QUE
                    a PREND_LA_VALEUR 2*k
                    AFFICHER «x=»
                    AFFICHER x
                    AFFICHER «-»
                    AFFICHER a
                    AFFICHER «*PI»
                    FIN_SINON
        FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

36 **1.**



2. $a = \frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi + 16\pi + 2\pi}{12}$

$= \frac{27\pi}{12} = \frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$;

la mesure principale est $\frac{\pi}{4}$.

$b = \frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{9\pi - 16\pi - 2\pi}{12}$

$= -\frac{9\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4}$; la mesure principale est $-\frac{3\pi}{4}$.

$c = \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi - 9\pi - 16\pi}{12} = -\frac{23\pi}{12} = -2\pi + \frac{\pi}{12}$;

la mesure principale est $\frac{\pi}{12}$.

37 À M, on associe $\frac{\pi}{5}$; à M_1, on associe $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$;

à M_2, on associe $\frac{4\pi}{5}$; à M_3, on associe $-\frac{4\pi}{5}$;

à M_4, on associe $-\frac{\pi}{5}$.

38 $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}) = \frac{\pi}{4}$;

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CO}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CO}) = \frac{\pi}{4}$.

39 *Corrigé dans le manuel.*

40 **a)** $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BB'}) = \frac{\pi}{2}$.

b) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CC'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC'}) = \frac{\pi}{3}$.

c) $(\overrightarrow{C'O}, \overrightarrow{C'B'}) = (\overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{C'B'}) = \frac{\pi}{6}$.

41 **a)** $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{4}$.

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = \pi$.

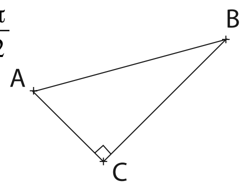
c) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DE}) = -\frac{\pi}{2}$.

d) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DE}) = -\frac{\pi}{4}$.

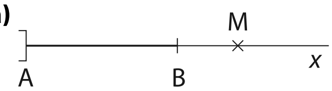
42 $\widehat{ACB} = \pi - (\widehat{CAB} + \widehat{CBA}) = \frac{\pi}{2}$

$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}$.

Le triangle ABC est rectangle en C.

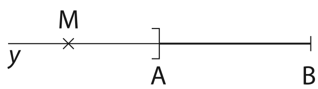


43 **a)**



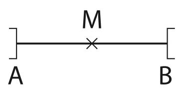
$M \in]Ax)$

b)



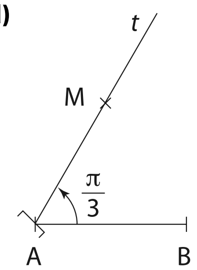
$M \in]Ay)$

c)



$M \in]AB[$

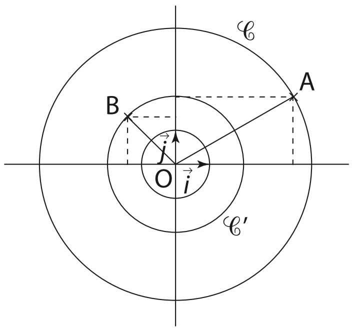
d)



$M \in]At)$

44 *Corrigé dans le manuel.*

45 **1. a)**



b) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{12}$.

2. a) $A\left(4\cos\dfrac{\pi}{6}\,;\, 4\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ soit $\left(2\sqrt{3}\,;\,2\right)$.

$B\left(2\cos\dfrac{3\pi}{4}\,;\, 2\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ soit $\left(-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right)$.

b) $\overrightarrow{AB}\left(-\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\,;\, \sqrt{2} - 2\right)$.

$AB^2 = \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2} - 2\right)^2 = 2 + 4\sqrt{6} + 12 + 2 - 4\sqrt{2} + 4$

$= 20 + 4\sqrt{6} - 4\sqrt{2}$; donc $AB = 2\sqrt{5 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}$.

PROPRIÉTÉS DES ANGLES ORIENTÉS

46 **1. a)** $(\vec{u}, 2\vec{v}) = \dfrac{\pi}{6}$.

b) $(\vec{v}, -2\vec{u}) = (\vec{v}, -\vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u}) + \pi = -\dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{5\pi}{6}$.

c) $(-\vec{v}, -\vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u}) = -\dfrac{\pi}{6}$.

2. a) $(3\vec{u}, -2\vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v}) = \alpha + \pi$.

b) $(-2\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + \pi$.

c) $(-3\vec{u}, -2\vec{v}) = (-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$.

47 **1.** $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$

$= \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$

$= \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\pi}{7} = \dfrac{11\pi}{14}$.

2. $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}\right)$ a pour mesure principale $\dfrac{11\pi}{14}$.

48 *Corrigé dans le manuel.*

49 **1.** $\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$.

$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}\right) = -\dfrac{5\pi}{12} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{9\pi}{12} = -\dfrac{3\pi}{4}$.

2. a) $\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}\right) = \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}\right)$

$= -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{4} = -\pi$.

La mesure principale est π.

b) Les points E, B, D sont alignés.

50 **1.** D'après la relation de Chasles :

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}\right)$.

2. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}\right) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} = \pi$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{AB}$,

et avec DE = 4 cm et AB = 3 cm, on a $k = -\dfrac{4}{3}$.

51 *Corrigé dans le manuel.*

52 **1.** $\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$; $\left(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. L'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ est le demi-cercle de diamètre [AB] contenant Q et privé de A et B.

53 **1.** Si A, B, C sont alignés, alors $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et il existe un réel m tel que $\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB}$ (avec $m \neq 0$ car A, B, C distincts deux à deux).

Si $m > 0$, alors $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens,

donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0 + 2n\pi$.

Si $m < 0$, alors $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires,

donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \pi + 2n\pi$.

Donc pour tout réel m, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'implication est vraie.

2. Réciproquement : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = k\pi$ équivaut à

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0 + 2n\pi$ ou $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \pi + 2n\pi$,

c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires, soit A, B, C alignés.

La réciproque est vraie.

54 *Corrigé dans le manuel.*

55 $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et de même sens,

donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}\right) = 0$. Or (relation de Chasles) :

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}\right)$.

Donc : $0 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} + \underbrace{\pi + \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}\right)}$

$0 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6} + \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}\right)$.

D'où : $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}\right) = -\dfrac{5\pi}{12}$.

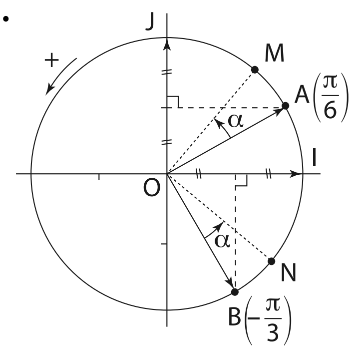
56 $\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED}\right) = \left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{ED}\right)$

$= \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} + \pi$

$= \dfrac{9\pi + 8\pi + 9\pi + 6\pi + 12\pi}{12} = \dfrac{44\pi}{12}$.

$\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED}\right) = \dfrac{11\pi}{3} = 4\pi - \dfrac{\pi}{3}$, donc $\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$.

57 **1.**



2. $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON}\right)$

soit $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right) = -\alpha + \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \alpha = -\dfrac{\pi}{2}$.

58 **1.** L'implication est vraie : $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

2. « Si $\cos x = \dfrac{1}{2}$, alors $x = \dfrac{\pi}{3}$ ».

Cette implication est fausse. Par exemple : $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

59 **a)** $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$;

donc : $\cos \frac{7\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

b) $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$; donc : $\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

c) $-\frac{13\pi}{6} = -2\pi - \frac{\pi}{6}$;

donc : $\cos -\frac{13\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin -\frac{13\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

60 **a)** $\frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$; donc : $\cos \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\frac{81\pi}{4} = 20\pi + \frac{\pi}{4}$; donc : $\cos \frac{81\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \frac{81\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $-\frac{107\pi}{4}\pi = -26\pi - \frac{3\pi}{4}$;

donc : $\cos -\frac{107\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin -\frac{107\pi}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

61 **a)** $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$; donc : $\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\frac{71\pi}{3} = 24\pi - \frac{\pi}{3}$; donc : $\cos \frac{71\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{71\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $-\frac{97\pi}{3} = -32\pi - \frac{\pi}{3}$;

donc : $\cos -\frac{97\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin -\frac{97\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

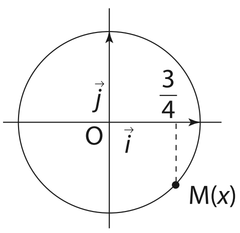
62 *Corrigé dans le manuel.*

63 **1.** À N, est associé $x + \frac{\pi}{2}$; à P, est associé $x + \pi$; à Q, est associé $x + \frac{3\pi}{2}$.

2. a) $\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x + \pi) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$
$= \cos x - \sin x - \cos x + \sin x = 0.$

b) $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x + \pi) + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$
$= \sin x + \cos x - \sin x - \cos x = 0.$

64 **1.**



2. a) $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$; donc $\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$\sin(x + \pi) = -\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x = \frac{3}{4}$; $\cos(\pi - x) = -\cos x = -\frac{3}{4}$.

65 $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ et $x \in [0 ; \pi]$; donc $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x = -\frac{1}{3}$;

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$;

$\cos(x + \pi) = \frac{1}{3}$.

66 *Corrigé dans le manuel.*

ÉQUATIONS

67 **a)** $\sin x = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{6} ; -\frac{5\pi}{6}\right\}$.

b) $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$; $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right\}$.

c) $\sin x = -\frac{1}{2}$; $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{6} ; -\frac{5\pi}{6}\right\}$.

d) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$; $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6}\right\}$.

68 **1. a)** $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$; $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\right\}$.

b) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$; $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$.

c) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4}$; $\mathcal{S} = \left\{\frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\right\}$.

2. a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4} ; -\frac{3\pi}{4}\right\}$.

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6}\right\}$.

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{3} ; -\frac{2\pi}{3}\right\}$.

69 *Corrigé dans le manuel.*

70 **a)** $\cos x = 0{,}7$; $\mathcal{S} = \{0{,}795\}$.

b) $\sin x = \frac{1}{3}$; $\mathcal{S} = \{0{,}400 ; 2{,}802\}$.

c) $\cos x = -\frac{3}{7}$; $\mathcal{S} = \{2{,}014 ; 4{,}269\}$.

71 **a)** $\cos x = 0{,}6$; $\mathcal{S} = \{0{,}927\}$.

b) $\sin x = -\frac{2}{5}$; $\mathcal{S} = \{-0{,}412\}$.

72 **a)** $\sin x = 0{,}4$; $\mathcal{S} = \{0{,}412 ; 2{,}730\}$.

b) $\sin x = \frac{5}{6}$; $\mathcal{S} = \{0{,}985 ; 2{,}156\}$.

c) $\cos x = -\frac{3}{7}$; $\mathcal{S} = \{2{,}014 ; 4{,}269\}$.

AVEC LES TICE

73 **2.** Le triangle MCP semble rectangle et isocèle.

3. a) CM = CN par symétrie orthogonale par rapport à (AC).
De même, CN = CP par symétrie par rapport à (CB).
Donc CM = CN = CP.

b) De même, par symétrie :
$(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CN})$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CP}) = (\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB})$ (voir page 204).

c) $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CP}) = (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CN}) + (\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CP})$
$= 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}) + 2(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB})$
$= 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$, d'où le résultat.

ROC Restitution organisée de connaissances

74 **1. a)** $(-\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$.

$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, -\vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v}) + \pi = (\vec{u}, \vec{v})$.

b) $(\vec{u}, \vec{v}) - (\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{u}') + (\vec{u}, \vec{v}) - (\vec{u}', \vec{v}) - (\vec{v}, \vec{v}') = 0$.

$\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{u}') - (\vec{v}, \vec{v}') = 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{u}') = (\vec{v}, \vec{v}')$.

2. a) $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \pi - \alpha$.

b) $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right) = \alpha$. **c)** $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right) = \pi - \alpha$.

Prendre toutes les initiatives

75 $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) - \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)$

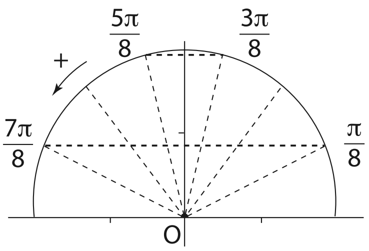
$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) + \pi = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Le triangle ABC est rectangle en C.

76



$$\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} - \sin\frac{7\pi}{8}$$
$$= \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} = 0.$$

77 La génératrice du cône est égale à $\sqrt{16 + 9} = 5$ soit 5 cm.

Le périmètre du cercle de base a pour longueur 6π. Il est égal à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ soit $\dfrac{2\pi \times 5 \times \alpha}{2\pi} = 5\alpha$.

Donc $5\alpha = 6\pi$ et $\alpha = \dfrac{6\pi}{5}$ radians.

EXERCICES Approfondissement (page 210)

78 $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{OB}, \vec{i}\right) + \left(\vec{i}, \overrightarrow{OA}\right)$

$= \left(\vec{i}, \overrightarrow{OA}\right) - \left(\vec{i}, \overrightarrow{OB}\right)$

$= \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$.

$\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{4}$;

donc : $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}\right) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$.

$\left(\vec{i}, \overrightarrow{ON}\right) = \dfrac{\pi}{12} + \pi = \dfrac{13\pi}{12}$,

donc la mesure principale de $\left(\vec{i}, \overrightarrow{ON}\right)$ est $-\dfrac{11\pi}{12}$.

79 **1. a)** $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3}$.

b) $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}\right) = -\dfrac{5\pi}{6}$.

c) $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AO}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$.

d) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}\right)$

$= \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) + \pi + \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right) + \pi$

$= -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{7\pi}{6}$.

Donc la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ est $\dfrac{5\pi}{6}$.

2. $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OH}\right) = \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AO}\right) + \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}\right) + \pi$

$= -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{3\pi}{2}$.

Les droites (AD) et (OH) sont donc perpendiculaires.

80 $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BF}\right) = \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF}\right)$

$= \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF}\right) + \pi$

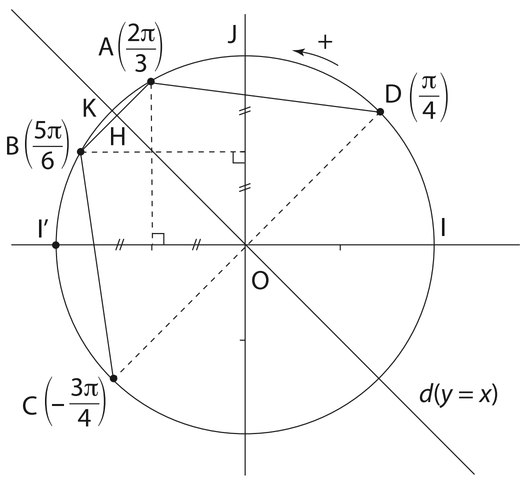
$= -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} + \pi = -\dfrac{\pi}{6}$.

Donc la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BF}\right)$ est $-\dfrac{\pi}{6}$.

• $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) + \pi$

$= \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{11\pi}{12}$.

81 **1.**



2. a) $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OH}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.

b) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}\right) = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{12}$.

$\left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OB}\right) = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OB}\right) - \left(\vec{i}, \overrightarrow{OH}\right)$

$= \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$.

D'où $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OH}\right) = \left(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OB}\right)$.

c) Le triangle AOB est isocèle et d est la bissectrice de $\widehat{AOB}$; donc d est la médiatrice de [AB], et A et B sont symétriques par rapport à d.

d) La droite (CD) a pour équation $y = x$. C'est la bissectrice de $\widehat{IOJ}$ et d est la bissectrice de $\widehat{JOI'}$; donc d est perpendiculaire à (CD). C'est la médiatrice de [CD].

3. Il en résulte que ABCD est un trapèze isocèle.