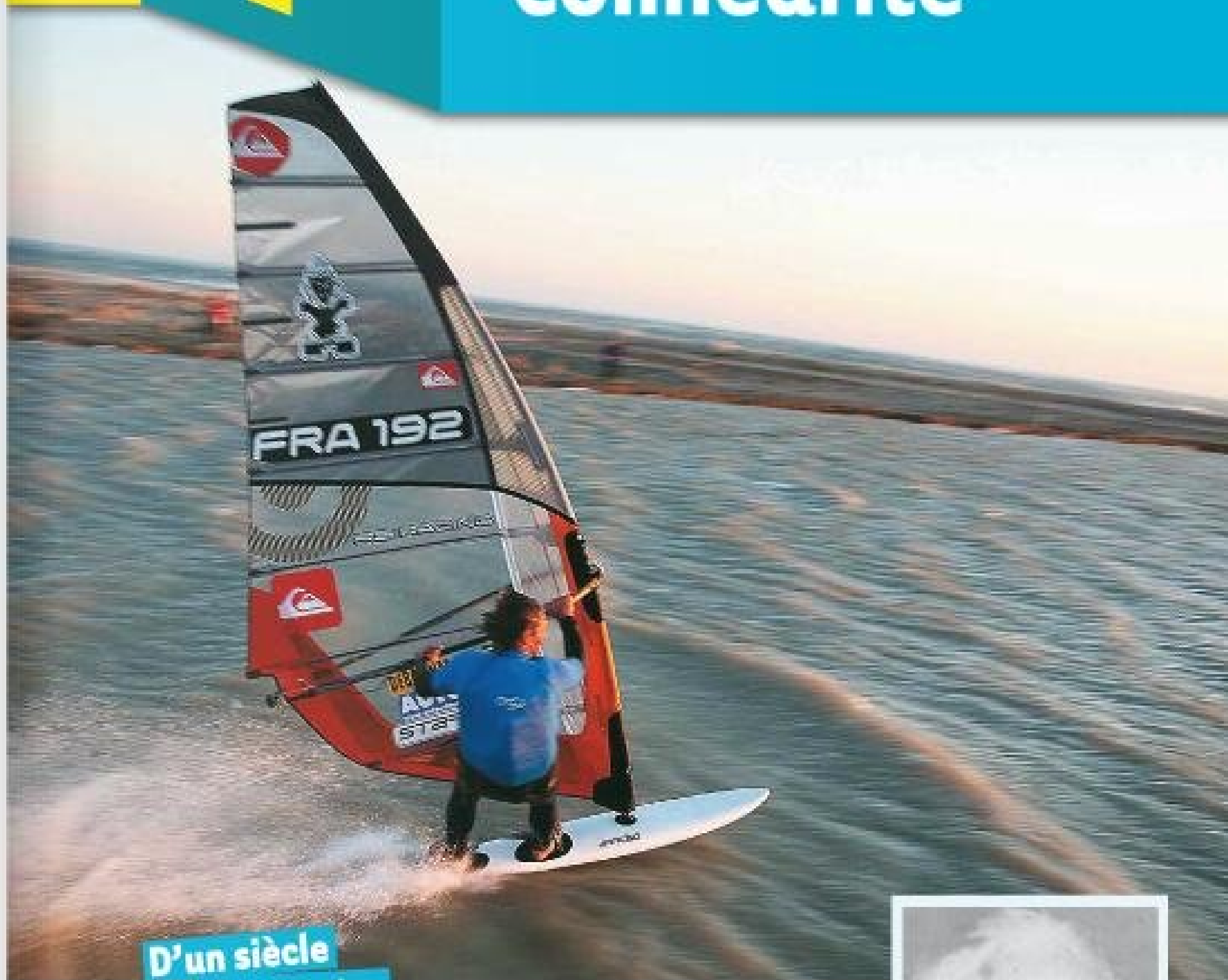
CHAPITRE 7

Vecteurs. Colinéarité



D'un siècle à un autre

Le Français Antoine Albeau est multiple champion du monde de planche à voile et a remporté plusieurs courses longue distance.

Si la navigation en mer est un art complexe et physique, elle mobilise également les facultés intellectuelles et utilise notamment le calcul vectoriel. Pour obtenir la route réellement suivie par exemple (vitesse fond), on calcule la somme vectorielle du cap choisi (vitesse surface) et de la dérive (courant).

On doit la notion de vecteur du plan telle qu'on l'utilise aujourd'hui à l'Italien Giusto Bellavitis.

En savoir plus sur **Giusto Bellavitis**

→ Chercheurs d'hier p. 179

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

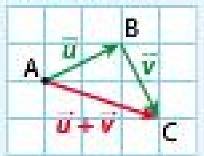
Égalité de vecteurs

Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à dire que ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

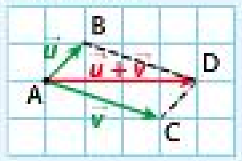
1 ABC est un triangle. Placez les points D et E tels que :
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$.
Quelle est la nature du quadrilatère ADCE ?

Somme de vecteurs

- Relation de Chasles
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



- Règle du parallélogramme
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$



2 ABC est un triangle.
a) Construisez les points D, E et F tels que :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$;
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$;
$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}$.
b) Démontrez que C est le milieu de [DE].

Vecteurs colinéaires

- Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- Dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre k non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

3

Sur la droite ci-dessus les divisions sont régulières.
Complétez les égalités suivantes :
$\overrightarrow{AM} = \ldots\ \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = \ldots\ \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CP} = \ldots\ \overrightarrow{CB}$.

Coordonnées d'un vecteur

(O ; I, J) est un repère. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $(x ; y)$ et $(x' ; y')$. k est un nombre quelconque.

1. $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' ; y + y')$.
$k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx ; ky)$.
$\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.

2. Si les points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

4 Dans un repère (O ; I, J) on donne les points A(–3 ; 3) et B(5 ; –1). M est un point de coordonnées $(x ; y)$.
a) Calculez en fonction de x et y les coordonnées de $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.
b) Calculez les coordonnées de $3\overrightarrow{MB}$.
c) Déduisez-en les coordonnées de M telles que :
$\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$.

5 Dans un repère (O ; I, J) on donne les points A(–2 ; 2), B(1 ; –3), C(9 ; –1) et D(6 ; 4).
Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Équations de droites

Dans un repère toute droite d a une équation de la forme :

- $y = mx + p$ si d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. (m est le **coefficient directeur** de d.)
- $x = c$ si d est parallèle à l'axe des ordonnées.
- Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points de d tels que $x_A \neq x_B$ alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

6 Placez dans un repère (O ; I, J) les points A(–2 ; 1), B(4 ; 2), C(–2 ; –1) et D(–1 ; 2).
Trouvez une équation pour les droites (AB), (AC) et (BD).

7 Dans un repère (O ; I, J),
a) construisez la droite d passant par le point A(3 ; –2) et de coefficient directeur $m = \frac{3}{4}$;
b) trouvez une équation de cette droite.

Voir les corrigés p. 363

Activité 1 CONDITION DE COLINÉARITÉ

TICE

Avec GeoGebra

outil 1 outil 7

1 **a)** Affichez la grille et créez les points A(–3 ; 3), B(1 ; 5) et C(1 ; 1).
Puis créez un point D quelconque. Créez les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.
b) Ouvrez le tableur de GeoGebra puis saisissez les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la manière suivante :

outil 4

$A_1 = x(u)$;
$B_1 = y(u)$;
$A_2 = x(v)$;
$B_2 = y(v)$.

Puis dans C3, saisissez : `C3=A1*B2–A2*B1`.

2 **a)** Déplacez D en (3 ; 2).
Qu'obtient-on dans la case C3 ? Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$?
b) Trouvez d'autres positions de D pour lesquelles on obtient encore la valeur 0 dans C3. Que peut-on dire chaque fois des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$?

3 On donne les vecteurs $\vec{u}(X ; Y)$ et $\vec{v}(X' ; Y')$. Proposez une relation entre les coordonnées traduisant la colinéarité de ces vecteurs.

Activité 2 UNE PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES VECTEURS

TICE

Avec GeoGebra

outil 1 outil 7

Animation

1 **a)** Créez les points A(0 ; 0), B(5 ; 0) et C(1 ; 3). Effacez les axes et affichez la grille.
b) Créez les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
c) Créez deux curseurs a et b allant de –5 à +5 (incrément : 0,01). Dans les propriétés du curseur, modifiez la valeur de la largeur à 500. Puis créez le vecteur $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (saisie w = a*u + b*v).

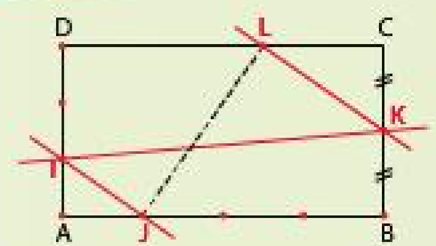
outil 3

2 **a)** Créez les points D(3 ; 4), E(–3 ; 6), F(–3 ; –3), G(7 ; –6).
b) Trouvez les valeurs des curseurs pour lesquelles $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Exprimez $\overrightarrow{AD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Recommencez avec les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$.

3 Complétez la conjecture :
« $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs non colinéaires. Pour tout point M, il existe … ».

Problème ouvert

Refaites cet exercice après le chapitre … Est-il plus facile ?



ABCD est un rectangle. Sur les segments [AB] et [AD], les divisions sont régulières. Le point K est le milieu du segment [CB]. Les droites (IJ) et (LK) sont parallèles.

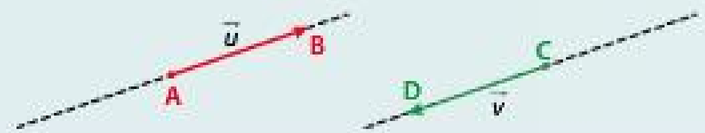
Les droites (IK), (JL) et (AC) sont-elles concourantes ?

1 Vecteurs colinéaires

1.1 Définition et conséquence

Définition 1

Dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



Théorème 1

Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre k ($k \neq 0$) tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

Convention. Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ ($0\vec{u} = \vec{0}$).

En résumé, les trois propositions suivantes sont équivalentes.

(AB) et (CD) sont des droites parallèles.	$\Leftrightarrow$	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.	$\Leftrightarrow$	Il existe un nombre k non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

Conséquence pour l'alignement. Dire que les trois points A, B, C distincts deux à deux sont alignés équivaut à dire qu'il existe un nombre k non nul tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

1.2 Expression de la colinéarité par les coordonnées

Théorème 2

Dans un repère, dire que les vecteurs $\vec{u}(X\,;Y)$ et $\vec{v}(X'\,;Y')$ sont colinéaires équivaut à dire que

$$XY' - X'Y = 0.$$

LOGIQUE
Démonstration par équivalence
→ p. 346

Démonstration

1 • Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et démontrons que $XY' - X'Y = 0$.

Il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ donc $X' = kX$ et $Y' = kY$.

On en déduit que $XY' - X'Y = X(kY) - (kX)Y = 0$.

On a prouvé que **si** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, **alors** $XY' - X'Y = 0$.

2 • Supposons que $XY' - X'Y = 0$ et démontrons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ l'une de ses coordonnées, par exemple X, est non nulle. Donc :

$Y' = \frac{X'}{X}Y$. Posons $\frac{X'}{X} = k$, il en résulte que $X' = kX$ et $Y' = kY$, donc $\vec{v} = k\vec{u}$.

Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (si $Y \neq 0$, on conclut de même en posant $\frac{Y'}{Y} = k$).

On a prouvé que **si** $XY' - X'Y = 0$ **alors** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Les propositions « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires » et « $XY' - X'Y = 0$ » **sont équivalentes.**

Remarque. Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $X' = kX$ et $Y' = kY$. Autrement dit les coordonnées de ces vecteurs **sont proportionnelles**. Le tableau

X	X'
Y	Y'

$\times k$

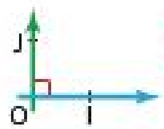
est un tableau de proportionnalité.

2 Décomposition d'un vecteur

2.1 Trois types de repères

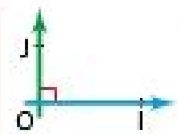
En classe de seconde, on a rencontré les repères suivants, notés (O ; I, J).

Repère orthonormé



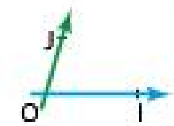
- (OI) ⊥ (OJ).
- OI = OJ, unité de longueur choisie dans le plan.

Repère orthogonal



- (OI) ⊥ (OJ).

Repère quelconque



On pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires.

Désormais choisir un repère, c'est :

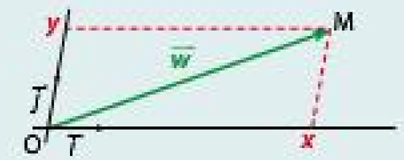
- choisir un point appelé **origine du repère** (ici le point O) ;
- choisir un couple de **vecteurs non colinéaires** (ici $(\vec{i}\,;\vec{j})$).

On notera donc le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ou $(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

Théorème 3

Dire que le point M a pour coordonnées $(x\,;y)$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ signifie que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$



Par définition, les coordonnées d'un vecteur $\vec{w}$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ sont celles du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{w}$.

Conséquence

Dire que $\vec{w}$ a pour coordonnées $(x\,;y)$ signifie que $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

2.2 Expression d'un vecteur en fonction de deux vecteurs non colinéaires

On admettra les deux théorèmes suivants.

Théorème 4

A, B et C sont **trois points non alignés** du plan. Alors, pour tout point M, il existe un couple unique de nombres $(x\,;y)$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Ce couple est celui des coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ (et du point M) dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

Théorème 5

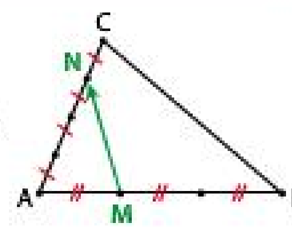
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **deux vecteurs non colinéaires**. Pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe un couple unique de nombres $(x\,;y)$ tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Animation

Exemple. D'après la relation de Chasles :

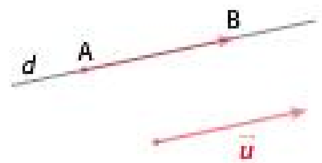
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} \text{ soit } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Il en résulte que, dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\,;\frac{3}{4}\right)$.



3 Équation cartésienne d'une droite

3.1 Vecteur directeur d'une droite



Définition 2 Un vecteur directeur d'une droite *d* est un vecteur $\vec{u}$ non nul, dont **la direction est celle de *d*.**

Conséquences. • La donnée d'un point A et d'un vecteur $\vec{u}$ non nul définit une droite *d* unique.
• Si A et B sont deux points distincts de *d*, alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de *d*.
• Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de *d*, alors $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) est aussi un vecteur directeur de *d*.

Théorème 6 *d* et *d'* sont deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.
Dire que *d* et *d'* sont parallèles équivaut à dire que $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

3.2 Équation cartésienne d'une droite

Théorème 7 Dans un repère :
1. Toute droite a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ **ou** $b \neq 0$.
Le vecteur $\vec{u}(-b\,;a)$ est alors un vecteur directeur de *d*.
2. a, b, c sont trois nombres tels que $a \neq 0$ **ou** $b \neq 0$. L'ensemble des points $M(x\,;y)$ dont les coordonnées sont telles que $ax + by + c = 0$ est une droite. Une équation de la forme $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$) est appelée **équation cartésienne** de la droite *d*.

• Exercice résolu D → p. 174

Démonstration

1. Choisissons un point $A(x_0\,;y_0)$ sur la droite *d* et notons $\vec{u}(p\,;q)$ un vecteur directeur de *d*.
Par définition $\vec{u}$ est non nul donc $p \neq 0$ ou $q \neq 0$. « $M(x\,;y)$ est un point de *d* » équivaut à « $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ». $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_0\,; y - y_0)$. Donc d'après le théorème 2 la colinéarité de $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ équivaut à $(x - x_0)q - (y - y_0)p = 0$ soit $qx - py - qx_0 + py_0 = 0$.
Si on pose $a = q$, $b = -p$ et $c = py_0 - qx_0$ cette condition de colinéarité s'écrit $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
Finalement dire que $M(x\,;y)$ est un point de *d* équivaut à dire qu'il existe trois nombres a, b, c avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ tels que $ax + by + c = 0$. Ainsi *d* a une équation de la forme $ax + by + c = 0$. Un vecteur directeur est $\vec{u}(p\,;q)$ c'est-à-dire $\vec{u}(-b\,;a)$.

2. Cherchons l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$).
• Si $b \neq 0$, $ax + by + c = 0$ équivaut à $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$.
Cette équation est de la forme $y = mx + p$. Ainsi l'ensemble cherché est une droite.
• Si $b = 0$, alors $a \neq 0$; $ax + by + c = 0$ équivaut à $x = -\dfrac{c}{a}$. L'ensemble cherché est la droite d'équation $x = -\dfrac{c}{a}$ parallèle à l'axe des ordonnées.

Lien entre vecteur directeur et coefficient directeur

Cette équation est appelée équation réduite de *d*.

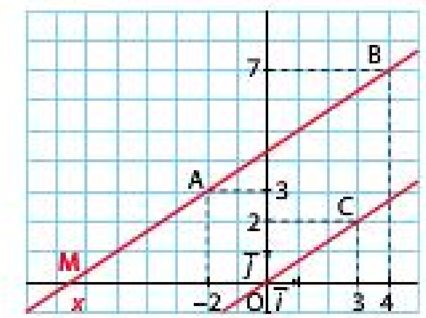
Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $y = mx + p$.
Une équation cartésienne s'écrit $mx - y + p = 0$ et $\vec{u}(1\,;m)$ est un vecteur directeur de *d*.
Ainsi « m est le **coefficient directeur** de *d* » équivaut à « $\vec{u}(1\,;m)$ est un **vecteur directeur** de *d* ».

OBJECTIF 1 Savoir utiliser la colinéarité

• Dans un repère, $\vec{u}(X\,;Y)$ et $\vec{v}(X'\,;Y')$ sont colinéaires équivaut à $XY' - X'Y = 0$.
• « Les droites (AB) et (CD) sont parallèles » équivaut à « $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ».
• « A, B, C, distincts deux à deux, sont alignés » équivaut à « $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ».

EXERCICE RÉSOLU A Utiliser la colinéarité en géométrie repérée

Dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points $A(-2\,;3)$, $B(4\,;7)$ et $C(3\,;2)$.
1. Démontrez que les droites (AB) et (OC) sont parallèles.
2. $M(x\,;0)$ est un point de l'axe des abscisses. Calculez x pour que A, B, M soient alignés.

Méthode	Solution
• On fait une figure.	
1. On démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires. Pour cela, on calcule leurs coordonnées. • On conclut.	**1.** $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(6\,;4)$ et $\overrightarrow{OC}(3\,;2)$. Ainsi $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (OC) sont parallèles.
2. A, B, M alignés équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ colinéaires. On applique la condition de colinéarité : $XY' - X'Y = 0.$ • On conclut.	**2.** $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x + 2\,;-3)$ et $\overrightarrow{AB}(6\,;4)$. La colinéarité de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ se traduit par : $(x+2)\times 4 - (-3)\times 6 = 0$ d'où $4x = -26$ et $x = -6{,}5$. M a pour coordonnées $(-6{,}5\,;0)$.

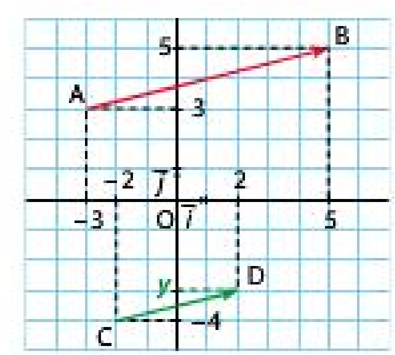
Mise en pratique Pour tous les exercices, on se place dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1 On donne les points $A(-2\,;-1)$, $B(0\,;4)$, $C(2\,;-3)$ et $D(6\,;-1)$.
1. $M(x\,;0)$ est un point de l'axe des abscisses. Pour quelle valeur de x les points A, B, M sont-ils alignés ?
2. Démontrez alors que (CM)//(BD).

2 On donne les points $A(-3\,;2)$ et $B(-1\,;7)$.
Le point $M\left(-6\,;-\dfrac{11}{2}\right)$ est-il un point de (AB) ?

3 On donne les points $A(3\,;2)$, $B(7\,;3)$, $C(-3\,;y)$ et $D(1\,;-3)$.
Calculez y pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

4 On donne la figure suivante.



Pour quelle valeur de y les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?

EXERCICE RÉSOLU B Utiliser la colinéarité en géométrie non repérée

ABC est un triangle, D le point tel que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

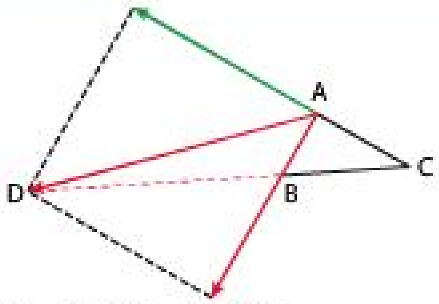
1. Exprimez $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Déduisez-en que les points B, C et D sont alignés.

Méthode

- On fait une figure.

Solution



Méthode **1.** On utilise la relation de Chasles.

Solution **1.** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Méthode • On exploite la définition du point D.

Solution $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \left(3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

Méthode **2.** On montre qu'il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC}$.

Solution **2.** La comparaison de $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ incite à mettre « –2 en facteur ».

$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = -2\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = -2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$.

$\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BC}$.

Méthode • On conclut.

Solution Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, donc les points B, C et D sont alignés.

Mise en pratique

5 A et B sont deux points distincts. On se propose de construire le point M tel que :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}.$$

1. À l'aide de la relation de Chasles, démontrez que $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$.

2. Pourquoi M est-il un point de la droite (AB) ? Construisez-le.

6 ABC est un triangle.

1. Construisez le point D tel que :

$$5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.$$

2. a) À l'aide de la relation de Chasles, démontrez que $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$.

b) Déduisez-en que les points B, C, D sont alignés.

7 ABC est un triangle.

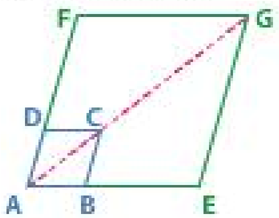
1. Construisez les points I et J tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

2. a) Exprimez $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ puis en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

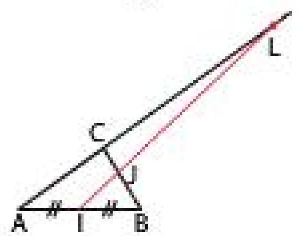
b) Déduisez-en que (IJ) et (BC) sont parallèles.

8 ABCD et AEGF sont deux parallélogrammes tels que $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.



Démontrez que les points A, C, G sont alignés.

9 ABC est un triangle. Le point I est le milieu du segment [AB]. $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AC}$.



1. Exprimez $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$.

2. Déduisez-en que les points I, J, L sont alignés.

OBJECTIF 2 Équation cartésienne d'une droite et parallélisme

1. Dans un repère :

- Toute droite a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$).
Le vecteur $\vec{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de d.
- $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$) est l'équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$.

2. Si deux droites d et d' ont pour vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.
« d parallèle à d' » équivaut à « $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ colinéaires ». → exercice résolu E

EXERCICE RÉSOLU C Déterminer une équation cartésienne

Dans un repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points A(1 ; 5), B(–3 ; 2) et C(5 ; –1).

1. Trouvez une équation cartésienne de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(3\,;1)$.

2. Trouvez une équation cartésienne de la droite d' passant par A et parallèle à (BC).

Méthode **1.** • On connaît un vecteur directeur de d, on peut donc en déduire une forme de l'équation.

Solution **1.** $\vec{u}(3\,;1)$ est un vecteur directeur de d, donc d a une équation de la forme $x - 3y + c = 0$.

Méthode • On utilise le fait que A est un point de d.

Solution Les coordonnées (1 ; 5) de A vérifient l'équation de d :
$1 - 3 \times 5 + c = 0$ d'où $1 - 15 + c = 0$ et $c = 14$.

Méthode • On conclut.

Solution d a pour équation cartésienne $x - 3y + 14 = 0$.

Méthode **2.** On justifie que $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de d'.
Puis on procède comme pour le **1**.

Solution **2.** (BC) et d' sont parallèles donc $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de d'. $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées (8 ; –3) donc d a une équation de la forme $-3x - 8y + c = 0$.
A(1 ; 5) est un point de d' donc

$$-3 \times 1 - 8 \times 5 + c = 0$$

soit $-3 - 40 + c = 0$ et $c = 43$.

Méthode • On conclut.

Solution d' a pour équation cartésienne :
$-3x - 8y + 43 = 0$ ou $3x + 8y - 43 = 0$.

Mise en pratique Pour tous les exercices, on se place dans un repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

10 Dans chacun des cas suivants, trouvez une équation cartésienne de la droite d.

a) A(–2 ; 5) est un point de d et $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ un vecteur directeur de d.

b) d passe par A(–5 ; 3) et a pour coefficient directeur $m = \frac{2}{3}$.

11 On donne les points A(1 ; –1) et B(3 ; 2).
Trouvez une équation cartésienne de la droite d passant par le point C(–4 ; 6) et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

12 d a pour équation $2x - 3y + 5 = 0$. Trouvez une équation de Δ, parallèle à d passant par A(–1 ; 2).

13 Représentez graphiquement chacune des droites suivantes.

a) d_1 passe par A(1 ; 2) et a pour vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j}$.

b) d_2 a pour équation $5x - 4y - 9 = 0$.

c) d_3 passe par B(2 ; 4) et a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

14 Trouvez une équation cartésienne de la droite d d'équation :

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}.$$

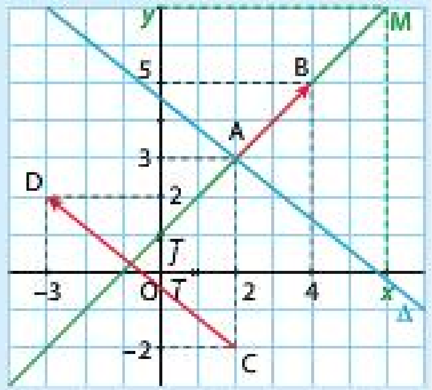
Le vecteur $\vec{u}(3\,;2)$ est-il un vecteur directeur de d ?

EXERCICE RÉSOLU D Utiliser la condition de colinéarité pour déterminer une équation cartésienne

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne les points A(2 ; 3), B(4 ; 5), C(2 ; –2) et D(–3 ; 2).

1. Trouvez une équation cartésienne de la droite (AB).

2. Trouvez une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et parallèle à la droite (CD).



Méthode

1. On définit une droite par un point et un vecteur directeur.
On traduit l'appartenance de M par la relation de colinéarité.

• On simplifie et on conclut.

2. $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur directeur de Δ.
On reprend la méthode de la question **1**.

Remarque

Pour chacune des questions, on peut se ramener aux conditions du résolu C en définissant la droite par un point et un vecteur directeur.

Solution

1. M(*x* ; *y*) est un point quelconque de la droite (AB).
Dire que « M appartient à la droite (AB) » équivaut à dire que « $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ».
$\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x-2\,;\,y-3)$ et $\overrightarrow{AB}(2\,;\,2)$.
La condition de colinéarité se traduit par :
$$2(x-2)-2(y-3)=0 \text{ soit } 2x-2y+2=0.$$
La droite (AB) a pour équation cartésienne :
$$x-y+1=0.$$

2. Dire que « M(*x* ; *y*) est un point de Δ » équivaut à dire que « les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CD}$ » sont colinéaires.
$\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x-2\,;\,y-3)$ et $\overrightarrow{CD}(-5\,;\,4)$.
La colinéarité de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CD}$ se traduit par :
$$4(x-2)+5(y-3)=0 \text{ soit } 4x+5y-23=0.$$
La droite Δ a pour équation cartésienne :
$$4x+5y-23=0.$$

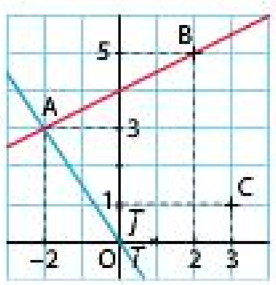
Mise en pratique

Pour tous les exercices, on se place dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

15 En tenant compte des renseignements portés sur la figure ci-après, trouvez une équation cartésienne :

a) de la droite (AB) ;

b) de la droite Δ passant par C et parallèle à (AO).



16 Trouvez une équation cartésienne de la droite *d* dans chacun des cas suivants.

a) *d* est parallèle à la droite Δ d'équation :
$$2x-y+3=0$$
et passe par A(0 ; 1).

b) *d* passe par $A\left(\frac{7}{4}\,;\,\frac{8}{5}\right)$ et est parallèle à la droite Δ d'équation $\frac{4}{5}x-\frac{5}{7}y+\frac{3}{8}=0$.

17 On donne les points A, B et C de coordonnées respectives (4 ; 3), (–2 ; 1) et (5 ; 2).
Dans chacun des cas suivants, trouvez une équation cartésienne de la droite *d*.

a) *d* passe par A et est parallèle à (BC).

b) *d* passe par A et le milieu I de [BC].

18 On donne A(2 ; 3), B(5 ; 7) et C(–7 ; –9).
Le point C est-il un point de la droite (AB) ?

19 On donne A(2 ; 3), B(–2 ; 1) et C(1 ; –2).
Trouvez une équation de la médiane issue de B dans le triangle ABC.

EXERCICE RÉSOLU E Droites parallèles

Dans chacun des cas suivants, dites si les droites *d* et *d'* sont parallèles.

1. *d* et *d'* ont pour équations respectives $x-4y+2=0$ et $-\frac{1}{2}x+2y+5=0$.

2. *d* et *d'* ont pour équations respectives $3x-2y+1=0$ et $y=\frac{7}{5}x-1$.

Méthode

1. On cherche un vecteur $\vec{u}$ directeur de *d* et un vecteur directeur $\vec{u'}$ de *d'*.

• On vérifie si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires.

• On conclut.

2. La droite *d'* est définie par son équation réduite. On transforme son équation.

• On est ainsi ramené au cas précédent.

• On utilise la condition de colinéarité ; on vérifie si XY' – X'Y est nul.

• On conclut.

Solution

1. $\vec{u}(4\,;\,1)$ est un vecteur directeur de *d* et $\vec{u'}\left(-2\,;\,-\frac{1}{2}\right)$ est un vecteur directeur de *d'*.

On remarque que $\vec{u}=-2\vec{u'}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires.

Ainsi les droites *d* et *d'* sont parallèles.

2. *d'* a pour équation cartésienne :
$$7x-5y-5=0.$$

$\vec{u}(2\,;\,3)$ est un vecteur directeur de *d* et $\vec{u'}(5\,;\,7)$ un vecteur directeur de *d'*.

$2\times7-3\times5=-1$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires.

d et *d'* ne sont pas parallèles.

Mise en pratique

Pour tous les exercices, on se place dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

20 Dans chacun des cas suivants, dites si les droites *d* et Δ distinctes sont parallèles ou sécantes.

a) $d : x-\frac{4}{7}y+2=0$ et $\Delta : \frac{5}{3}x-y+3=0$.

b) *d* a pour vecteur directeur $\vec{u}=\frac{-9}{2}\vec{i}+3\vec{j}$ et Δ a pour équation $2x+3y-3=0$.

c) $d : 2x-3y+5=0$ et $\Delta : 0{,}4x-0{,}6y+8=0$.

21 **1.** Démontrez que les droites d'équations respectives $5x-2y-4=0$ et $y=-2{,}5x+0{,}5$ ne sont pas parallèles.

2. Tracez ces droites dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3. Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?

22 A(–1 ; 2) et B(3 ; 5) sont deux points d'une droite *d*. La droite *d'* passe par O et a pour coefficient directeur 0,75.
Les droites *d* et *d'* sont-elles parallèles ?

23 Comment choisir le nombre *m* pour que les droites *d* et Δ d'équations respectives $2x-3y+4=0$ et $mx-2y+2=0$ soient parallèles ?

24 Pour quelle valeur du nombre *m* les droites *d* et Δ d'équations respectives $3x+y=0$ et $(2m-1)x+(m-3)y-1=0$ sont-elles parallèles ?

OBJECTIF 3 Choisir un repère pour démontrer

Théorème 4. A, B et C sont trois points non alignés du plan. Alors pour tout point M, il existe un couple unique de nombres $(x\,;y)$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
Ce couple $(x\,;y)$ est le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

EXERCICE RÉSOLU F

ABCD est un parallélogramme, les points P et Q sont tels que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

1. Déterminez les coordonnées des points B, C et D dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP})$.

2. Démontrez que les points C, P et Q sont alignés.

Méthode

1. • On fait une figure.

Note
Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP})$ on a Q(1 ; 0) et P(0 ; 1).

• On exprime les vecteurs en fonction de $\overrightarrow{AQ}$ et $\overrightarrow{AP}$.

• On utilise la règle du parallélogramme.

Attention
Bien noter les coordonnées dans le bon ordre.

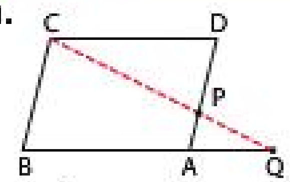
2. • On calcule par exemple les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CQ}$.

• On examine la colinéarité de ces deux vecteurs.

• On conclut.

Solution

1.



$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AP}$ et D a pour coordonnées (0 ; 3).

$\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AQ}$ et B(–2 ; 0).

Comme ABCD est un parallélogramme :
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AQ} + 3\overrightarrow{AP}$ donc C a pour coordonnées (–2 ; 3).

2. $\overrightarrow{CP}$ a pour coordonnées (0 – (–2) ; 1 – 3) soit (2 ; –2).
$\overrightarrow{CQ}$ a pour coordonnées (1 – (–2) ; 0 – (3) soit (3 ; –3).

On constate que $\overrightarrow{CQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CP}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CQ}$ sont colinéaires.
Les points C, P et Q sont alignés.

Mise en pratique

25 Choisir un repère

ABC est un triangle. P, Q, R sont tels que :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{CR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \text{ et } \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}.$$

1. Faites une figure.

2. Dans chacun des cas suivants, calculez les coordonnées de P, Q, R.

a) On choisit le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

b) On choisit le repère $(B\,;\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

c) On choisit le repère $(C\,;\overrightarrow{CR}, \overrightarrow{CQ})$.

3. a) Quel repère choisissez-vous pour démontrer que les points P, Q, R sont alignés ?

b) Terminez les calculs.

26 Choisir un repère

ABCD est un parallélogramme. Les points I, J, K sont tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BC}$.
On veut démontrer que les points I, J, K sont alignés.

1. Faites une figure.

2. a) Le choix du repère $(B\,;\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BC})$ vous paraît-il pertinent ? Pourquoi ?

b) Si oui, démontrez à partir de ce repère l'alignement des points I, J, K.

c) Si le choix précédent ne vous paraît pas pertinent, choisissez vous-même un autre repère et terminez les calculs.

Pour se tester

Exercices interactifs

27 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.
Pour toutes les questions on se place dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

a) La droite d'équation $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$) a pour vecteur directeur $\vec{u}$(...... ; ......).

b) L'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées est de la forme ......

c) Dire que les vecteurs $\vec{u}(x\,;\,y)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y')$ sont colinéaires équivaut à dire que ......

d) La droite d'équation $y = mx + p$ a pour vecteur directeur $\vec{u}$(1 ; ......).

e) Dire que les droites d'équations $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles équivaut à dire que ......

28 Vrai ou faux

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.
On se place dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

a) On donne les points A(–3 ; –5), B(5 ; 8) et C(3 ; 5). Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires.

b) Les droites d'équations $8x + 2y + 6 = 0$ et $3x + \frac{3}{4}y - 5 = 0$ sont parallèles.

c) $\vec{u}(3\,;4)$ et $\vec{v}(2{,}4\,;3{,}2)$ sont deux vecteurs directeurs d'une même droite.

d) Pour toute droite il existe un vecteur directeur.

e) Pour toute droite il existe un coefficient directeur.

f) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$ et $3x + 2y - 6 = 0$ sont des équations d'une même droite.

29 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.
On se place pour toutes ces questions dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

1. La droite d'équation $y = \frac{2}{5}x + 3$ a pour vecteur directeur :

a) (–2 ; 5) b) (2 ; 5) c) (5 ; 2)

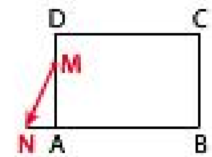
2. Le vecteur $\vec{u}\left(\frac{1}{2}\,;-3\right)$ est colinéaire au vecteur $\vec{v}$ de coordonnées :

a) (–1 ; 6) b) $\left(-\frac{2}{3}\,;\frac{16}{3}\right)$ c) $\left(2\,;-\frac{1}{3}\right)$

3. La droite d'équation $3x + 2y - 5 = 0$ a pour coefficient directeur :

a) $m = -\frac{2}{3}$ b) $m = -\frac{3}{2}$ c) $m = \frac{3}{2}$

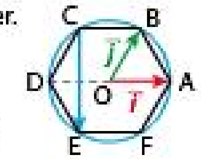
4. ABCD est un rectangle.



$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.
Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est égal à :

a) $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ b) $\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ c) $-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

5. ABCDEF est un hexagone régulier.



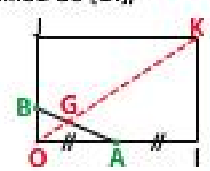
On pose $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$.
Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est égal à :

a) $\vec{j} - 2\vec{i}$ b) $\vec{j} + 2\vec{i}$ c) $\vec{i} - 2\vec{j}$

30 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. OIKJ est un rectangle. A est le milieu de [OI],
$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.



a) Dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, G a pour coordonnées $\left(\frac{2}{5}\,;\frac{3}{5}\right)$.

b) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OI} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OJ}$. c) O, G, K sont alignés.

2. Dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ la droite d est définie par les points A(–3 ; 6) et B(3 ; 2).

a) d a pour équation $2x + 3y - 12 = 0$.

b) Les points A, B et C(6 ; 0) sont alignés.

c) La droite Δ passant par O et parallèle à d a pour équation $y = -\frac{3}{2}x$.

3. ABC est un triangle. Les points I et J sont tels que :
$4\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}$ et $5\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{CA}$.

a) $\overrightarrow{IJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

b) Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, le vecteur $\vec{u}(-5\,;4)$ est un vecteur directeur de (IJ).

c) Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ la droite (BC) a pour équation $x + y - 1 = 0$.

Voir les corrigés p. 366

Apprendre à chercher

31 Choisir un repère

ABCD est un carré. Les points I et J sont tels que :
$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$
Les droites (DI) et (BJ) se coupent en G et les droites (AG) et (BC) se coupent en K.

Objectif Trouver la relation de colinéarité liant les vecteurs $\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{KC}$.

1. Faites une figure précise pour bien visualiser la situation.

2. Lorsqu'on ne voit pas de piste qui conduirait à la solution, on peut toujours choisir un repère. Plusieurs choix sont possibles, mais pour avoir des coordonnées simples on choisit le repère $(A ; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$ (voir Objectif 3 page 176).

Quelles sont les coordonnées de B, D et C dans ce repère ?

3. Pour trouver la relation de colinéarité liant $\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{KC}$, il faut trouver les coordonnées de K. Mais au préalable il faut celles de G, intersection des droites (DI) et (BJ).

a) Trouvez une équation de (DI) puis de (BJ).

b) Déduisez-en les coordonnées de G.

4. On connaît l'abscisse de K. Notons y son ordonnée.

En traduisant l'alignement des points A, G et K, trouvez y puis concluez.

32 Étudier la position relative de trois droites

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$,
- la droite d_1 passe par les points A(3 ; –2) et B(7 ; 2) ;
- la droite d_2 a pour équation $2x - y + 5 = 0$;
- la droite d_3 passe par le point O et a pour coefficient directeur $m = \frac{3}{2}$.

Objectif Démontrer que les droites sont concourantes.

Vous pouvez utiliser GeoGebra.

1. Construisez les droites d_1, d_2, d_3 dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Pour démontrer que trois droites sont concourantes un moyen consiste à chercher, par exemple, si d_2 et d_3 sont sécantes en M et de vérifier ensuite que M est un point de d_1.

a) Vérifiez que d_1, d_2, d_3 ne sont pas parallèles deux à deux.

b) Trouvez une équation de d_3.

c) Calculez les coordonnées de M intersection de d_2 et d_3.

d) M est-il un point de d_1 ? Concluez.

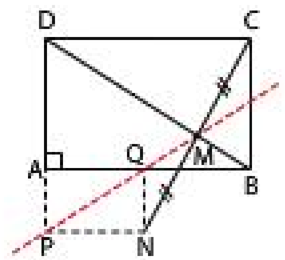
33 Étudier une configuration

ABCD est un rectangle. M est un point du segment [BD] distinct de B et D.

Le point N est le symétrique de C par rapport à M.

La parallèle à (AB) passant par N coupe (AD) en P.

La parallèle à (AD) passant par N coupe (AB) en Q.



Objectif Démontrer que les points P, M et Q sont alignés et que la droite (PQ) garde une direction fixe, quel que soit le point M choisi.

1. Pour faciliter la résolution on choisit un repère. Prenons $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Quelles sont les coordonnées des points B, C et D ?

2. M varie sur]BD[.
On prend l'initiative de noter m l'abscisse de M avec $0 < m < 1$.
Il reste à calculer les coordonnées de N, P et Q en fonction de m.
Mais au préalable il faut trouver l'ordonnée de M.

a) En traduisant l'alignement des points D, B et M, trouvez l'ordonnée du point M en fonction de m.

b) Démontrez que le point N a pour coordonnées $(2m - 1 ; 1 - 2m)$.

c) Déduisez-en les coordonnées des points P et Q.

d) Vérifiez que les vecteurs $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires puis concluez.

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

34 Un problème de parallélisme

ABC est un triangle. Le point I est le milieu du segment [AB] et J le point tel que :
$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.$$
Démontrez que les droites (CI) et (AJ) sont parallèles.

35 Un problème d'alignement

ABC est un triangle. Les points M et N sont tels que :
$$2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} \text{ et } 2\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BC}.$$
Les points I, J, K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [MN].
À l'aide d'un repère bien choisi, démontrez l'alignement de ces trois points.

36 Narration et de recherche

Travail en groupe

Cet exercice peut également être traité en groupe et mener à une mise en commun des résultats.

ABC est un triangle. Les points I, J et K sont tels que :
- $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$.

1. Démontrez que les points C, K et I sont alignés.

2. La droite (AK) coupe (BC) en G.
Trouver le nombre k tel que $\overrightarrow{BG} = k\overrightarrow{BC}$.

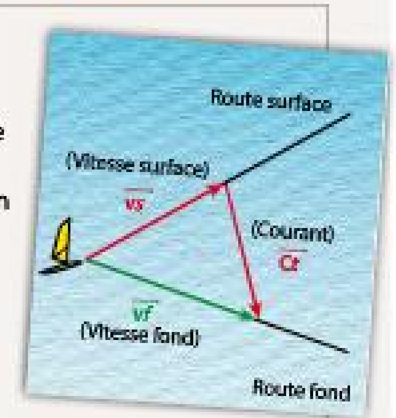
Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de la géométrie.

Giusto Bellavitis
(1803-1880)

Mathématicien et homme politique italien.
Il est connu pour ses travaux sur « l'équipollence des segments de droites dans le plan » (1835-1837). C'est une préfiguration de la notion de vecteurs et du calcul vectoriel actuel.
Ses travaux influencèrent ceux de Grassmann pour l'introduction de sa théorie des vecteurs en 1844.



Sur le Web http://www.chronomath.com/anx/vecteur.html

Utiliser GeoGebra

→ Pour étudier une configuration

TP 37 Étudier la position relative de trois droites

COMPÉTENCES

TICE	Mathématiques
■ Construire une figure géométrique ■ Émettre des conjectures ■ Tester une conjecture	■ Trouver l'équation cartésienne d'une droite ■ Étudier la colinéarité de vecteurs ■ Trouver le point d'intersection de deux droites

Dans un repère orthornormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne les points A(–1 ; –1), B(–1 ; 0) et C(0 ; –1). $\mathscr{C}$ est la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$. M est un point quelconque. M se projette orthogonalement en P sur l'axe des abscisses et en Q sur l'axe des ordonnées du plan. On souhaite étudier la position relative des droites (BQ), (AM) et (CP) suivant la position du point M.

1. Réaliser la figure

outil 1

a) Affichez la grille et créez les points A, B, C.

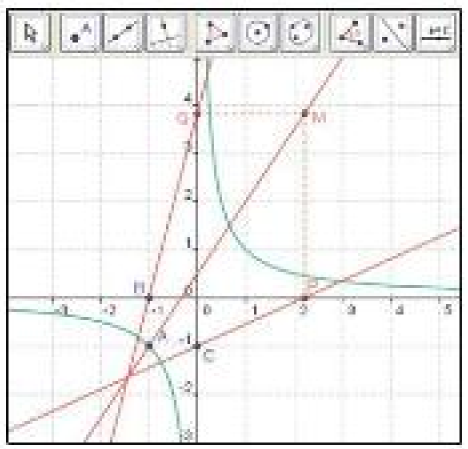
outil 5

b) Créez la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ puis les points M, P et Q.

c) Créez les droites (AM), (BQ) et (CP).

2. Conjecturer avec GeoGebra

Déplacez M. Quelle conjecture faites-vous concernant ces trois droites suivant que M appartient ou non à la courbe $\mathscr{C}$?



3. Démontrer

Notons $(a ; b)$ les coordonnées du point M.

a) • Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{CP}$ en fonction de a et b.

• Démontrez que ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si $ab=1$.

• Que dire alors des droites (AM), (BQ) et (CP) lorsque M est un point de $\mathscr{C}$?

b) On suppose dans cette question que $ab \neq 1$ (donc $M \notin \mathscr{C}$).

• Démontrez que la droite (BQ) a pour équation $bx-y+b=0$.

• Trouvez une équation de la droite (CP).

• Calculez en fonction de a et b les coordonnées de N intersection des droites (CP) et (BQ).

• Vérifiez que A, N et M sont alignés. Concluez.

Utiliser GeoGebra

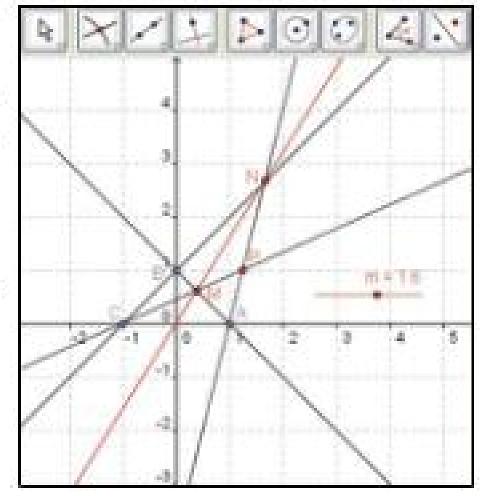
→ Pour étudier une configuration

TP 38 Droite mobile autour d'un point fixe

COMPÉTENCES

TICE	Mathématiques
■ Construire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. ■ Afficher une trace. ■ Émettre des conjectures.	■ Trouver l'équation cartésienne d'une droite. ■ Calculer les coordonnées d'un point, intersection de deux droites.

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne les points A(1 ; 0), B(0 ; 1) et C(–1 ; 0).
d est la droite passant par O de coefficient directeur m (m est un nombre différent de 0, de 1 et de –1).
La droite d coupe la droite (AB) en M et la droite (BC) en N.
Les droites (MC) et (AN) se coupent en P.
L'objectif est de trouver sur quelle ligne se déplace P lorsque la droite d pivote autour de O.



1. Réaliser la figure

a) Affichez la grille et créez les points O, A, B et C, puis tracez les droites (AB) et (BC).

outil 1

b) Créez un curseur pour le paramètre m. Réglages : $-10 \leqslant m \leqslant 10$; incrément : 0,1.

outil 3

c) Créez la droite d d'équation $y=mx$, puis les points M, N.

d) Tracez les droites (MC) et (NA), puis créez le point P.

2. Conjecturer avec GeoGebra

Activez la trace de P et déplacez le curseur.
Sur quelle ligne semble se déplacer le point P ?

3. Démontrer

a) • Trouvez une équation de la droite (AB) puis de la droite (BC).

• Déduisez-en, en fonction de m, les coordonnées des points M et N.

b) • Démontrez que le vecteur $\vec{u}(2+m ; m)$ est un vecteur directeur de la droite (CM).

• Déduisez-en une équation de la droite (CM).

c) • Démontrez que le vecteur $\vec{v}(2-m ; m)$ est un vecteur directeur de la droite (AN).

• Déduisez-en une équation de la droite (AN).

d) Calculez les coordonnées du point P et concluez.

Entraînement

Compléments numériques

DE TÊTE

39 d a pour équation $x - y + 1 = 0$. Trouvez les coordonnées de deux points de d.

40 Les vecteurs $\vec{u}(2\sqrt{3}\,;\,3)$ et $\vec{v}(4\,;\,2\sqrt{3})$ sont-ils colinéaires ?

41 On donne $\vec{u}(3\,;\,-2)$ et $\vec{v}(x\,;\,4)$. Trouvez x pour que les deux vecteurs soient colinéaires.

42 Trouvez une équation de la droite d passant par le point $A(0\,;\,2)$ et de coefficient directeur 3.

43 Trouvez un vecteur directeur de la droite d d'équation $2x - 5y + 3 = 0$ et dites si le point $A(6\,;\,3)$ est un point de la droite d.

44 Trouvez un vecteur directeur de la droite d d'équation $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$.

45 Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(-3\,;\,2)$ et $(1\,;\,3)$.
Quelles sont les coordonnées de $2\vec{u} + \vec{v}$?

VECTEURS COLINÉAIRES

Pour les exercices 46 à 56
$(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$ est un repère.

46 Dans chacun des cas suivants, dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

a) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = \dfrac{2}{3}\vec{i} - \vec{j}$.

b) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = -\dfrac{1}{3}\vec{i} - \dfrac{1}{2}\vec{j}$.

47 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v} = x\vec{i} - \vec{j}.$$

Comment choisir x pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires ?

48 $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs.

1. Calculez x et y pour que $\vec{u}\left(\dfrac{1}{2}\,;\,y\right)$ et $\vec{v}\left(x\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$ soient colinéaires à $\vec{w}(-1\,;\,3)$.

2. Déduisez-en le réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

49 Dans chacun des cas suivants, dites si les points A, B et C sont alignés.

a) $A(-1\,;\,1)$, $B\left(\dfrac{1}{2}\,;\,2\right)$, $C\left(-\dfrac{3}{4}\,;\,\dfrac{7}{6}\right)$.

b) $A(-5\,;\,2)$, $B(3\,;\,-1)$, $C(8\,;\,-3)$.

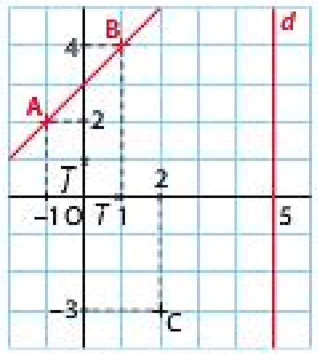
50 Les points M, N, P sont tels que :

$$\overrightarrow{MN} = 5\vec{i} + 2\vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MP} = x\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}.$$

Pour quelle valeur de x les points M, N, P sont-ils alignés ?

51 On donne les points $A(3\,;\,2)$ et $B(-2\,;\,1)$.
La droite (AB) coupe l'axe des abscisses en M et l'axe des ordonnées en N.
Sans utiliser une équation de (AB), calculez les coordonnées de M et N.

52 M est un point de la droite d parallèle à l'axe des ordonnées.



Les droites (AB) et (CM) sont parallèles.
Quelle est l'ordonnée de M ?

53 On donne les points $A(-3\,;\,1)$, $B(2\,;\,6)$, $C(12\,;\,-4)$ et $D(7\,;\,6)$.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [DC].
Les points M et N sont tels que :

$$5\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB} \quad \text{et} \quad 5\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA}.$$

1. Calculez les coordonnées de I, J, M et N.

2. Le point K étant le milieu du segment [MN], démontrez que les points I, J et K sont alignés.

54 On donne les points $A(-2\,;\,3)$, $B(4\,;\,5)$ et $C(27\,;\,9)$.
Démontrez que les droites (AB) et (OC) sont parallèles.

55 ABC est un triangle.

1. Construisez le point D tel que :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$$

2. En écrivant que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

56 Pour chacune des questions suivantes :
- faites une figure (A et B distincts) ;
- trouvez le nombre t tel que $\overrightarrow{MA} = t\overrightarrow{MB}$.

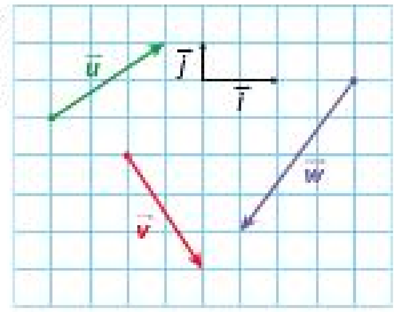
a) $M \in [AB]$ et $3AM = 2AB$.

b) $M \in [AB)$ et $2AM = 5AB$.

c) $M \in [BA)$ et $3BM = 5AB$.

EXPRESSION D'UN VECTEUR EN FONCTION DE DEUX VECTEURS NON COLINÉAIRES

57 Exprimez les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



58 ABC est un triangle.

1. Placez le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

2. a) Exprimez $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Déduisez-en que $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
Que dire alors des points B, C et D ?

59 ABCD est un parallélogramme.

1. Placez les points I et J tels que :

$$2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}.$$

2. a) Exprimez $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) Que pouvez-vous en conclure pour I, C et J ?

60 ABC est un triangle.

1. Placez les points D et E tels que :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \text{ et } 3\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}.$$

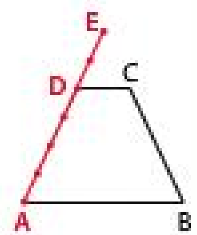
2. Exprimez $\overrightarrow{AE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Déduisez-en que A, D et E sont alignés.

61 ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD] tel que $AB = 3CD$.
E est le point de la demi-droite [AD) tel que $AE = \dfrac{3}{2}AD$.

1. Démontrez que

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = 3\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}\right).$$



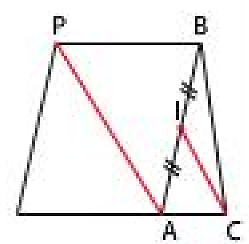
2. Déduisez-en que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires et que les points B, C et E sont alignés.

62 ABC est un triangle. Le point I est le milieu du segment [AB]. Le point P est tel que :

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.$$

1. Démontrez que :

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{IC}.$$



2. Déduisez-en que $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires.
Que dire alors des droites (AP) et (CI) ?

CHOISIR UN REPÈRE

63 ABCD est un parallélogramme. Les points P et Q sont tels que $\overrightarrow{AQ} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

1. Faites une figure.

2. a) Quelles sont les coordonnées de Q, P, B, D et C dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AP}\right)$?

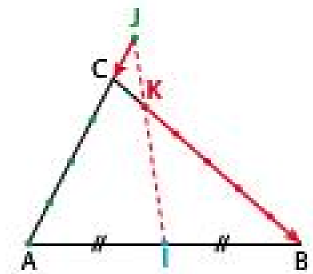
b) Déduisez-en que les points C, P et Q sont alignés.

64 ABCD est un parallélogramme. Les points M et P sont tels que $\overrightarrow{DM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BP} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
On souhaite démontrer que les points A, M et P sont alignés en choisissant un repère parmi les propositions suivantes :
- $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$
- $\left(B\,;\,\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$
- $\left(C\,;\,\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CP}\right)$

1. Quel est le choix qui vous paraît le plus pertinent ?

2. Démontrez, en utilisant le repère choisi, que A, M et P sont alignés.

65 Sur la figure ci-dessous :
- I est le milieu de [AB].
- $\overrightarrow{KB} + 5\overrightarrow{KC} = \vec{0}$.
- $5\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JA}$.



On veut démontrer que les points I, J, K sont alignés. On choisit le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

1. Calculez, dans ce repère, les coordonnées de I, J et K.

2. Concluez.

66 ABC est un triangle. Le point M est le milieu du segment [AB] et le point I celui du segment [MC]. Le point K est tel que $3\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CB}$. On veut démontrer que les points A, I et K sont alignés.

1. Choisissez un repère et calculez les coordonnées de M, I et K dans ce repère.

2. Concluez.

67 ABC est un triangle. Les points I et J sont tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = 4\overrightarrow{AC}.$$

Après avoir choisi un repère, démontrez que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.

ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UNE DROITE

Pour les exercices 68 à 78 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère.

68 Dans chacun des cas suivants, trouvez une équation de la droite d définie par le point A et le vecteur $\vec{u}$.

a) $A(-2; 4)$ et $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$. b) $A(-2; 5)$ et $\vec{u} = 2\vec{i}$.

c) $A(1; 2)$ et $\vec{u} = -4\vec{j}$.

69 La droite d passe par les points A et B. Dans chacun des cas suivants, trouvez une équation de d.

a) $A(1; 5)$ et $B(-3; 2)$. b) $A(3; 0)$ et $B(0; 2)$.

c) $A(4; 2)$ et $B(4; -3)$. d) $A(2; -2)$ et $B(4; -2)$.

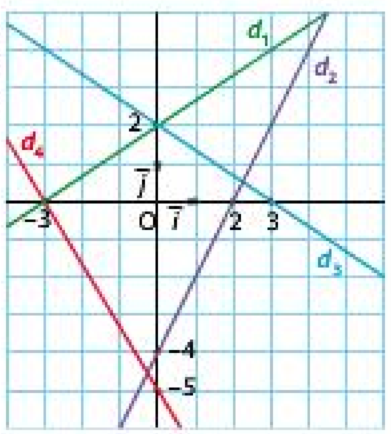
70 La droite d a pour équation $2x - 3y + 5 = 0$.

1. a) Quel est son coefficient directeur ?

b) Quelle est son ordonnée à l'origine ?

2. Le point A d'ordonnée $\frac{3}{2}$ est un point de d. Quelle est son abscisse ?

71 Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont représentées sur la figure ci-contre.

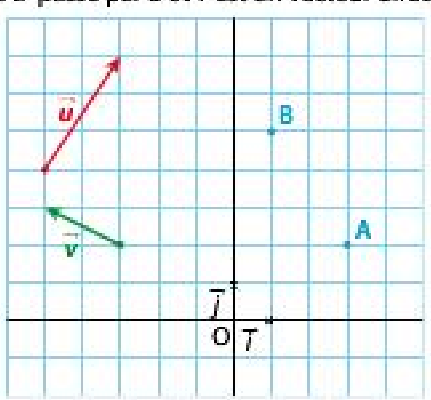


1. Quelle est la droite qui a pour équation $2x - y - 4 = 0$?

2. Trouvez une équation pour chacune des trois autres droites.

72 La droite d passe par le point A et $\vec{u}$ est un vecteur directeur.

La droite d' passe par B et $\vec{v}$ est un vecteur directeur.



1. a) Reproduisez la figure ci-dessous et tracez les droites d et d'.

b) Trouvez une équation de d puis de d'.

2. Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?

73 Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont définies par une équation. Déterminez pour chacune d'elles un point et un vecteur directeur.

a) $d_1 : 3x - 2y + 5 = 0$. b) $d_2 : 3y - x + 1 = 0$.

c) $d_3 : \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 = 0$. d) $d_4 : \frac{3}{4}x - 2y + \frac{7}{2} = 0$.

74 Les droites d et d' ont respectivement pour équation :

$$7x - 3y + 2 = 0 \text{ et } 5x - 2y - 8 = 0.$$

1. Démontrez que les droites d et d' sont sécantes.

2. Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?

75 La droite d est définie par les points $A(0; -2)$ et $B(6; 6)$. La droite Δ est définie par le point $C(-2; 3)$ et par le vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = 5\vec{i} - \vec{j}$.

1. Démontrez que d et Δ sont sécantes.

2. Calculez les coordonnées de leur point d'intersection.

76 La droite d_1 est définie par le point $A(4; 3)$ et le vecteur directeur $\vec{u}(2; 1)$.

La droite d_2 passe par les points $B(1; 5)$ et $C(4; 2)$.

La droite d_3 passe par O, origine du repère, et a pour coefficient directeur $\frac{4}{5}$.

1. Faites une figure.

2. Ces trois droites sont-elles concourantes ?

77 Les droites d_1 et d_2 ont respectivement pour équation $3x - 2y - 8 = 0$ et $5x + 4y - 6 = 0$.

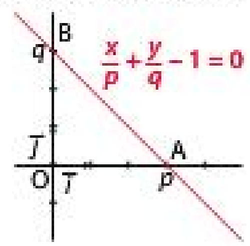
La droite Δ a pour équation :

$$2mx - (m + 1)y - 8 = 0.$$

Comment choisir le réel m pour que ces trois droites soient concourantes ?

78 **Équation cartésienne d'une droite particulière**

A est un point de l'axe des abscisses de coordonnées $(p; 0)$ et B un point de l'axe des ordonnées de coordonnées $(0; q)$ avec $p \neq 0$ et $q \neq 0$.



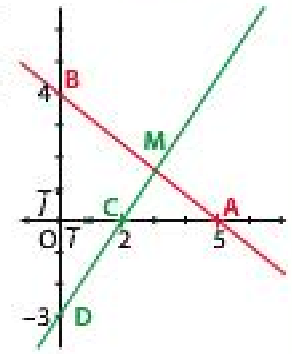
1. Démontrez que la droite (AB) a pour équation :

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0.$$

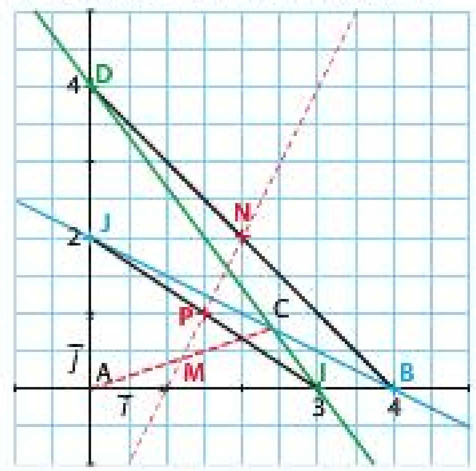
2. On donne les points $C(3; 0)$ et $D(0; -2)$. Déduisez-en, sans calcul, une équation de la droite (CD).

Pour les exercices 79 à 81
On pourra utiliser le résultat de l'exercice 77.

79 Quelles sont les coordonnées du point M intersection des droites (AB) et (CD) ?



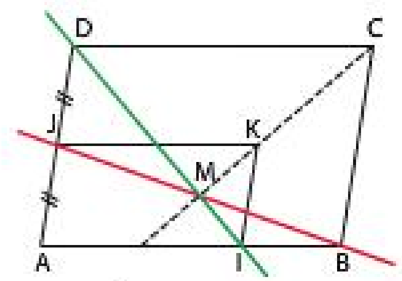
80 Les droites (DI) et (BJ) se coupent en C.



1. À partir des renseignements portés sur la figure, trouvez les coordonnées du point C.

2. Les points M, N et P sont les milieux respectifs des segments [AC], [BD] et [IJ]. Démontrez que ces trois points sont alignés.

81 ABCD et AIKJ sont deux parallélogrammes disposés comme l'indique la figure ci-dessous.



$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Le point M est l'intersection des droites (DI) et (BJ). On se propose de démontrer que les points M, K et C sont alignés.

On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$.

1. Quelles sont les coordonnées de B, C, D, K ?

2. Trouvez les coordonnées de M, intersection des droites (DI) et (BJ).

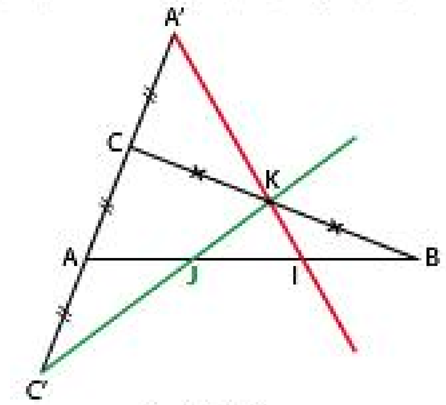
3. Concluez.

82 ABC est un triangle.

A' et C' sont deux points tels que :

A' est le symétrique de A par rapport à C et C' celui de C par rapport à A.

Le point K est le milieu du segment [BC]. La droite (A'K) coupe (AB) en I et la droite (C'K) coupe (AB) en J.



On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Trouvez une équation de (A'K) puis de (C'K).

2. a) Déduisez-en les coordonnées de I et J.

b) Quel lien existe-t-il entre les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{IB}$?

POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES

Pour les exercices 83 à 87 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère.

83 Trouvez une équation de la droite Δ passant par le point $A(-1; 4)$ et parallèle à la droite d d'équation :

$$3x - 2y + 1 = 0.$$

84 Trouvez une équation de la droite Δ passant par le point $A(-3; 5)$ et parallèle à la droite d d'équation :

$$y = \frac{2}{3}x - 3.$$

85 Trouvez une équation de la droite Δ passant par le point $C(3; 2)$ et parallèle à la droite d définie par les points $A(-1; 5)$ et $B(2; -2)$.

86 Pour quelle valeur de m, la droite d d'équation $mx - 3y + 2 = 0$ est-elle parallèle à la droite Δ d'équation $3x - 2y + 4 = 0$?

87 Dans chacun des cas suivants dites si les droites d et d' sont confondues, parallèles distinctes ou sécantes. Si ces droites sont sécantes, calculez les coordonnées de leur point d'intersection.

a) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x - 5y + 6 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x + 2y + 6 = 0 \\ 3x + \frac{3}{4}y - 5 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ \frac{1}{3}x + y - 2 = 0 \end{cases}$

88 **Implication et équivalence** LOGIQUE

P et Q sont deux propositions. Dites chaque fois si $P \Rightarrow Q$; $Q \Rightarrow P$; $P \Leftrightarrow Q$.

a) M et N sont deux points distincts.
P « $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{NI}$ », **Q** « I est le milieu de [MN] ».

b) A, B, M sont trois points distincts du plan.
P « $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont opposés », **Q** « MA = MB ».

c) A, B, C sont deux à deux distincts.
P « Il existe un réel k tel que CA = $|k|$ CB ».
Q « Les points C, A, B sont alignés ».

d) d et d' sont deux droites d'équations respectives $mx + y - 1 = 0$ et $x + ny + 1 = 0$.
P « d // d' », **Q** « $mn = 1$ ».

89 **Position relative de deux droites** ALGORITHMIQUE

Écrivez un algorithme dont le but est d'étudier la position relative de deux droites dont on connaît les équations cartésiennes dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ($a_1 \neq 0$ ou $b_1 \neq 0$) ;
$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ($a_2 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$).
Pensez au cas où d_1 et d_2 sont confondues.

AVEC LES TICE

90 **Un parallélisme étonnant**

• Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points A(–2 ; 0), B(0 ; –3) et C(0 ; 4). M est un point de l'axe des abscisses distinct de A et O. La droite d, parallèle à (AB) passant par M, coupe l'axe des ordonnées en J. La droite Δ, parallèle à (CM) et passant par B, coupe l'axe des abscisses en I.
On s'intéresse au comportement de la droite (IJ) lorsque M décrit l'axe des abscisses privé du point O.

1. Expérimenter avec GeoGebra

a) Affichez la grille et créez les points A, B, C.

b) Créez un point M quelconque distinct de A et O.

c) Créez les droites d et Δ puis les points I et J.

d) Créez la droite (IJ).

e) Affichez dans la fenêtre algèbre son équation sous la forme $y = mx + p$.

f) Déplacez le point M sur l'axe des abscisses. Que pouvez-vous conjecturer pour la droite (IJ) ?

2. Démontrer

On note m l'abscisse de M avec $m \neq 0$ et $m \neq -2$.

a) Calculez les coordonnées de I et J.

b) Démontrez que $\overrightarrow{IJ}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.
Concluez.

ROC Restitution organisée de connaissances

91 **Équation d'une droite**

Prérequis :

1. Dire que deux vecteurs $\vec{u}(X ; Y)$ et $\vec{v}(X' ; Y')$ sont colinéaires équivaut à dire que $XY' - X'Y = 0$.

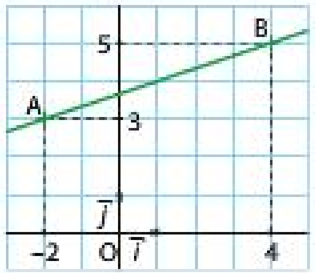
2. Dire que le point M appartient à la droite (AB) équivaut à dire que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

1. Démonstration

Démontrez que la droite d passant par les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ a pour équation :
$$(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + x_By_A - x_Ay_B = 0.$$

2. Application

La droite (AB) coupe l'axe des abscisses en M et l'axe des ordonnées en N. Quelles sont les coordonnées de ces deux points ?

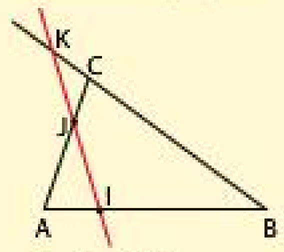


Prendre toutes les initiatives

92 $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs tels que :
$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = 2\vec{w} \\ \vec{v} - 3\vec{u} = 4\vec{w}. \end{cases}$$
Démontrez que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et trouvez le nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

93 ABC est un triangle. À tout nombre m, $m \neq 1$, on associe les points P et Q tels que :
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AQ} = (m+1)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$
Démontrez que le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est colinéaire à un vecteur fixe que l'on précisera.

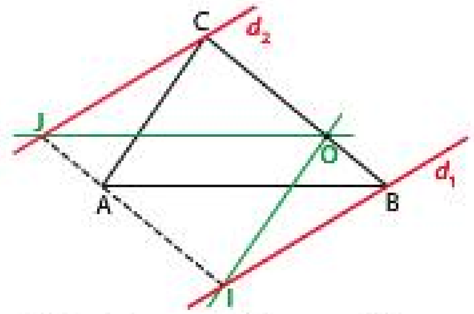
94 ABC est un triangle. I et J sont deux points tels que :
$$4\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \text{ et } 3\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AC}.$$
La droite (IJ) coupe la droite (BC) en K.



Trouvez les nombres k et t tels que :
$$\overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{KJ} = t\,\overrightarrow{IJ}.$$

95 **Équations de droites et alignement**

ABC est un triangle.
O est un point tel que :
$$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$
d_1 et d_2 sont deux droites parallèles passant respectivement par B et C.
La parallèle à (AB) passant par O coupe la droite d_2 en J et la parallèle à (AC) passant par O coupe la droite d_1 en I.



Le but de l'exercice est de démontrer l'alignement des points A, I et J.
On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Quelles sont les coordonnées de O ?

2. Le vecteur $\vec{u}(1 ; m)$ est un vecteur directeur des droites d_1 et d_2, ($m \neq 0$).

a) Trouvez une équation de d_1 et d_2.

b) Déduisez-en les coordonnées de I et J. Concluez.

96 **Droites concourantes**

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la droite d_1 passe par le point A(4 ; 3) et a pour vecteur directeur $\vec{u}(3 ; 2)$. La droite d_2 passe par B(6 ; 0) et a pour vecteur directeur $\vec{v}(2 ; -1)$.
d_3 est une droite passant par C(4 ; –2) et $\vec{w}$ est un de ses vecteurs directeurs.
Démontrez que d_1, d_2 et d_3 sont concourantes si et seulement si $\vec{w}$ est colinéaire au vecteur $4\vec{i} - 9\vec{j}$.

97 **Droites concourantes**

ABCD est un rectangle. Les points I, J, K et L sont tels que :
• $3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$ • $4\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD}$ • $8\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{BC}$ • $6\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DC}$.
Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (LI), (JK) et (AC) sont concourantes.
Pour cela on choisit le repère $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$.

1. Trouvez les coordonnées des points B, D, C, L et K.

2. a) Trouvez les coordonnées du point d'intersection des droites (AC) et (LI).

b) Achevez la démonstration.

98 ABC est un triangle et t un nombre non nul.
Les points I, J et K sont tels que :
• $\overrightarrow{AI} = t\,\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{CJ} = t\,\overrightarrow{CA}$ • $\overrightarrow{CK} = -t\,\overrightarrow{CB}$.
On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Calculez les coordonnées des points I, J et K en fonction de t.

2. Pour quelle valeur de t non nulle les points I, J et K sont-ils alignés ? Vérifiez à l'aide d'un dessin.

99 **Écrire un algorithme** ALGORITHMIQUE

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points $M(x_M ; y_M)$ et $N(x_N ; y_N)$.
On rappelle que le vecteur $\vec{u}(-b ; a)$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.
Le but de l'algorithme ci-dessous est de déterminer une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite (MN), lorsque M et N sont distincts.

```
1   VARIABLES
2     xM EST_DU_TYPE NOMBRE
3     yM EST_DU_TYPE NOMBRE
4     xN EST_DU_TYPE NOMBRE
5     yN EST_DU_TYPE NOMBRE
6     a EST_DU_TYPE NOMBRE
7     b EST_DU_TYPE NOMBRE
8     c EST_DU_TYPE NOMBRE
9   DEBUT_ALGORITHME
10    LIRE xM
11    LIRE yM
12    LIRE xN
13    LIRE yN
14    SI (xM==xN et yM==yN) ALORS
15      DEBUT_SI
16      AFFICHER "M et N sont confondus"
17      FIN_SI
18      SINON
19        DEBUT_SINON
20        a PREND_LA_VALEUR yN-yM
21        b PREND_LA_VALEUR . . . . . .
22        c PREND_LA_VALEUR . . . . . .
23        AFFICHER a
24        AFFICHER "x+"
25        AFFICHER b
26        AFFICHER "y+"
27        AFFICHER c
28        AFFICHER "=0"
29        FIN SINON
30  FIN ALGORITHME
```

1. Précisez l'objectif des lignes 14 à 17.

2. Complétez les lignes 21 et 22.

3. Testez votre algorithme avec M(3 ; 1) et N(0 ; 3).

100 ABC est un triangle.
Le point I est le milieu du segment [AB]. Les points J et L sont tels que :

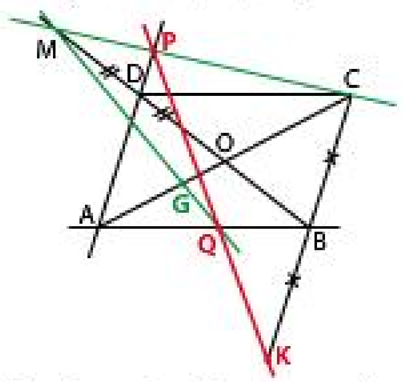
$$2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0} \text{ et } 3\overrightarrow{LC}=2\overrightarrow{LA}.$$

1. Faites une figure.

2. a) Exprimez les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IL}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$.

b) Déduisez-en que les points I, J et L sont alignés.

101 Vecteurs colinéaires et alignement
ABCD est un parallélogramme de centre O.
Le point M est le symétrique de O par rapport à D et K celui de C par rapport à B. G est le centre de gravité du triangle ADB. La droite (MC) coupe la droite (AD) en P. La droite (MG) coupe la droite (AB) en Q.



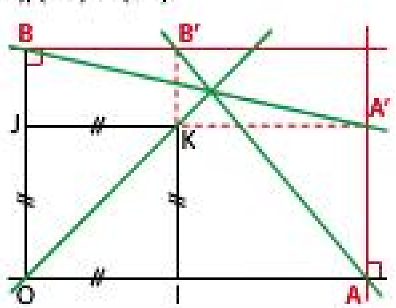
Le but de l'exercice est de démontrer que les points P, Q et K sont alignés.
On choisit le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

1. Calculez les coordonnées des points O, M, K et G.

2. Déduisez-en, à l'aide de la colinéarité de vecteurs, les coordonnées des points P et Q.

3. Concluez.

102 Droites parallèles ou concourantes
OIKJ est un carré. A est un point de la droite (OI) et B un point de la droite (OJ).
Le but de l'exercice est d'étudier la position relative des droites (AB'), (A'B) et (OK).



Note Une expérimentation avec GeoGebra est possible.

On choisit le repère $\left(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ et dans ce repère on note $(a; 0)$ les coordonnées de A et $(0; b)$ celles de B.

1. a) Démontrez que «(A'B) parallèle à (AB')» équivaut à « $a+b=1$ ».

b) Déduisez-en que si $a+b=1$, les trois droites (OK), (A'B) et (AB') sont parallèles.

2. Dans cette question on suppose $a+b \neq 1$.

a) Trouvez une équation de la droite (OK).

b) Démontrez que $(b-1)x+ay-ab=0$ est une équation de la droite (BA').

c) Déduisez-en que le point M, intersection de (OK) et (A'B), a pour coordonnées :

$$\left(\frac{ab}{a+b-1}; \frac{ab}{a+b-1}\right).$$

3. Démontrez que les points A, M et B' sont alignés. Concluez.

103 Comportement d'une droite TICE
ABCD est un rectangle de centre O tel que :

$$AB=4 \text{ et } AD=3.$$

À tout point M on associe le point N tel que :

$$\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.$$

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la droite (MN) lorsque M varie.

1. Expérimenter avec GeoGebra

a) Créez le rectangle ABCD et placez un point M.

b) Saisissez :
N=M+2vecteur[M,A]+vecteur[M,B]+vecteur[M,C].

c) Créez la droite (MN). Déplacez M. Affichez la trace de (MN). Quelle particularité semble présenter la droite (MN) ?

2. Démontrer
On note I le milieu de [BC] et J celui de [AI].

1. a) Démontrez que $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{JI}$.

b) Déduisez-en que $2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.

2. Démontrez que $\overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{MJ}$. Concluez.

Prolongement

1. Quel est l'ensemble des points M pour lesquels les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires ?

2. On choisit le repère orthonormé $\left(A; \vec{i}, \vec{j}\right)$ dans lequel les points B et D ont pour coordonnées respectives (4 ; 0) et (0 ; 3).
Trouvez une équation de l'ensemble des points M pour lesquels les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.

104 «Pour tout» LOGIQUE
Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, la droite d_m a pour équation $mx+y-3=0$ où m est un nombre donné. $M(x; y)$ est un point du plan.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

1. Pour tout nombre m, il existe une droite d_m.

2. Pour tout nombre x, **il existe** un nombre y tel que $M \in d_m$.

3. Pour tout nombre y, **il existe** un nombre x unique tel que $M \in d_m$.

4. Pour tout point M du plan, il **existe** un nombre m unique tel que $M \in d_m$.

5. Pour tout nombre m, il **existe** un unique point A indépendant de m appartenant à d_m.

105 Comportement d'un point TICE
ABC est un triangle, k un nombre. À chaque valeur de k on associe le point N tel que :

$$\overrightarrow{AN}=2k\overrightarrow{AB}+(2-k)\,\overrightarrow{AC}.$$

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de N lorsque k varie.

1. Expérimenter avec GeoGebra

1. a) Créez les points A, B, C. Créez un curseur noté k.
Réglage : $-10 < k < 10$; incrément : 0,01.

b) Saisissez :
N=A+(2k)vecteur[A,B]+(2–k)vecteur[A,C].

c) Activez la trace de N et faites varier k à l'aide du curseur. Que pouvez-vous conjecturer concernant le point N ?

2. Démontrer
À $k=0$ on associe N_0 et à $k=2$ on associe N_2.

a) Placez ces points sur la figure et exprimez $\overrightarrow{N_0N_2}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Exprimez $\overrightarrow{N_0N}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c) Déduisez-en que $\overrightarrow{N_0N}$ et $\overrightarrow{N_0N_2}$ sont colinéaires et concluez.

106 Moyenne pondérée et équation cartésienne
Avec ou sans tableur
Chaque mois dans sa classe de 1[re] S, Nicolas a deux notes sur 20 en mathématiques. L'une de contrôle, notée x, à coefficient 3, et l'autre de devoir à la maison, notée y, à coefficient 2. Les notes x et y sont toujours exprimées en points entiers. Nicolas calcule sa moyenne m à l'aide de la formule :

$$m=\frac{3x+2y}{5}.$$

1. Dans cette question on suppose $m=11$.

a) Vérifiez que les notes «possibles» sont liées par la relation $3x+2y-55=0$.

b) Déduisez-en que dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ l'ensemble des points $M(x; y)$ sont les points à coordonnées entières d'un segment contenu dans un carré que l'on précisera.

c) Construisez ce segment.

2. a) Sur la figure de la question précédente, placez le point M(8 ; 13).

b) Quelle est la moyenne m associée à M ?
Sur quel segment se trouvent tous les points associés à cette moyenne ? Construisez ce segment.

c) Trouvez sur la figure les points à coordonnées entières pour lesquels la moyenne est 10.

3. Nicolas veut trouver tous ces points, soit par le calcul soit à l'aide d'un tableur.

Par le calcul
Nicolas écrit :

$$y=\frac{50-3x}{2} \text{ avec } x \in [0; 20] \text{ et } y \in [0; 20].$$

a) Justifiez son choix.

b) Pourquoi x doit-il être un entier pair de l'intervalle [0 ; 20] ?

c) Nicolas pose alors $x=2k$ donc $y=25-3k$.
En donnant à k des valeurs entières, trouvez tous les couples possibles de notes.

Avec un tableur

a) Créez dans une feuille de calcul, un tableau à double entrée. Chaque case représente un couple du type $(x; y)$ où x et y prennent les valeurs entière de 0 à 20.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x/y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0											
3	1											

b) Tapez en B2 la formule =(3*$A2+2*B$1)/5.
Copiez la formule sur la plage de cellule B2:V22.
Que représente le tableau de résultats obtenus ?

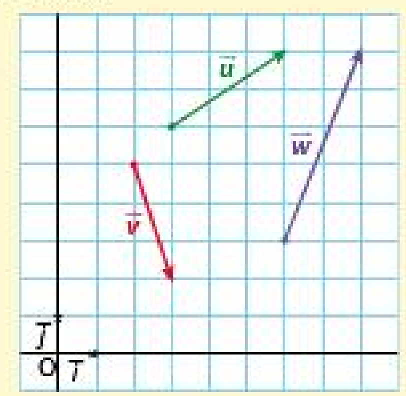
c) Déduisez-en tous les couples $(x; y)$ solutions.

Prendre toutes les initiatives

107 Dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, construisez l'ensemble des points dans chacun des cas suivants :

a) $(x-3y+1)^2=(y-4x+2)^2$. **b)** $x-3|y|+1=0$.

108 Trouvez, s'ils existent, les nombres a et b tels que : $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.



109 Théorème de Ménélaüs
ABC est un triangle. Les points P, Q et R sont tels que :
- $\overrightarrow{PA}=\alpha\overrightarrow{PB}$
- $\overrightarrow{QB}=\beta\overrightarrow{QC}$
- $\overrightarrow{RC}=\gamma\overrightarrow{RA}$ $(\alpha \neq 1, \beta \neq 1, \gamma \neq 1)$.

On choisit le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

1. Calculez les coordonnées des points P, Q et R.

2. Démontrez que :
«P, Q et R alignés» équivaut à « $\alpha\beta\gamma=1$ ».

EXERCICES

Travail en autonomie

→ **Les exercices suivants permettent de revoir les principales méthodes de résolution abordées dans le chapitre. Faites ces exercices à votre rythme, en utilisant si besoin les *coups de pouce* page 381.**

A Parallèle ou non ?

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A(0 ; 4), B(− 3 ; 1) et C(2 ; 0).

1. a) Placez les points A, B et C.

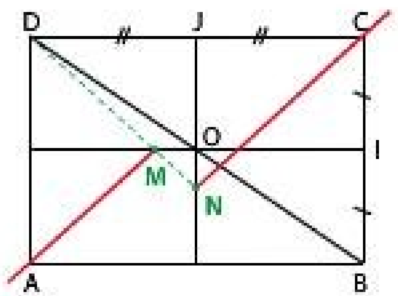
b) Construisez les points M, N et P tels que :
• $2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$; • $\overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$; • $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{CB}$. 1

2. Quelle conjecture faites-vous concernant les droites (AN), (BP) et (CM) ?

3. a) Calculez les coordonnées des points M, N et P.

b) Démontrez votre conjecture. 2

B De l'alignement au parallélisme



ABCD est un rectangle de centre O. Les points I et J sont les milieux respectifs de [BC] et [CD].
Les points M et N sont tels que :
$$4\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OI} = \vec{0} \quad \text{et} \quad 3\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}.$$
On choisit le repère $(O ; \overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OJ})$.

1. a) Quelles sont les coordonnées de A, B, C et D dans ce repère ?

b) Calculez les coordonnées de M et N. 3

2. Démontrez que :

a) les points D, M, N sont alignés ; 4

b) les droites (AM) et (CN) sont parallèles.

C ABC est un triangle.

1. On souhaite construire le point G tel que
$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

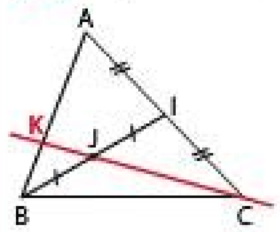
a) On note I le milieu de [AC]. Démontrez que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

b) Déduisez-en que G est le milieu de [BI].
Construisez G. 5

2. a) Construisez le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b) Démontrez que les points A, G et D sont alignés. 6

D Simplifiez-vous la tâche en choisissant un repère



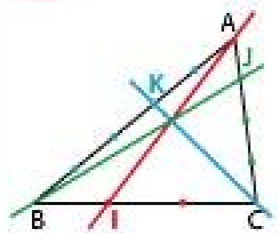
ABC est un triangle. I et J sont les milieux respectifs de [AC] et de [BI].
La droite (CJ) coupe la droite (AB) en K. On se propose de trouver le nombre k tel que $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AB}$.

1. Choisissez parmi les repères suivants :
• $(B ; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$; • $(C ; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CI})$; • $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$
celui qui vous paraît le mieux adapté au problème posé. Justifiez votre choix. 7

2. a) Votre repère étant choisi, calculez les coordonnées de I, J et C.

b) Déduisez-en celles de K, puis le nombre k. 8

E Sont-elles concourantes ?



Sur les côtés du triangle ABC les divisions sont régulières.

1. Quelles sont les coordonnées des points I, J et K dans le repère $(B ; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$? 9

2. Démontrez que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes. 10

F Savoir traduire une colinéarité

ABC est un triangle

1. Construisez le point D tel que $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 11

2. La droite (BD) coupe la droite (AC) en K. On se propose de trouver le nombre k tel que $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AC}$.
On choisit le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

a) Quelles sont les coordonnées de D dans ce repère ?

b) Déduisez-en celles de K et concluez. 12

G Un alignement 13

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A(6 ; − 1), B(4 ; 5) et C(− 2 ; − 1).

K est le point de la droite (BC) d'abscisse −5, J est le milieu de [AB]. La droite (AC) coupe l'axe des ordonnées en I.

Démontrez que les points I, J et K sont alignés.