CHAPITRE 13

Géométrie dans l'espace

A Le programme

S'adressant à tous les élèves de Seconde, le programme de géométrie dans l'espace a pour objectifs :
- de développer la vision dans l'espace des élèves en entretenant les acquis du collège concernant les solides usuels ;
- d'introduire les notions de plans et droites de l'espace et leurs positions respectives ;
- de fournir ainsi des configurations conduisant à des problèmes aptes à mobiliser d'autres champs des mathématiques (géométrie plane, fonctions, probabilités) ou de la physique.

Il importe donc tout particulièrement que la géométrie dans l'espace soit abordée tôt dans l'année scolaire.
L'utilisation d'un logiciel de visualisation et de construction est un élément déterminant dans « l'apprentissage de l'espace ».
Les élèves doivent être capables de représenter en perspective parallèle (dite aussi **cavalière**) une configuration simple et d'effectuer des constructions sur une telle figure. Ils doivent aussi être capables de mobiliser pour des démonstrations les théorèmes de géométrie plane.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Géométrie dans l'espace Les solides usuels étudiés au collège : parallélépipède rectangle, pyramides, cône et cylindre de révolution, sphère. Droites et plans, positions relatives. Droites et plans parallèles.	• Manipuler, construire, représenter en perspective des solides.	C'est l'occasion d'effectuer des calculs de longueur, d'aire et de volumes. On entraîne les élèves à l'utilisation autonome d'un logiciel de géométrie dans l'espace.

B Notre point de vue

Le cours de ce chapitre a été divisé en trois parties.
La première partie traite des solides de l'espace : nous y revoyons les principes de la représentation en perspective cavalière, la notion de patron d'un solide et les volumes des solides usuels. Pour aborder cette partie de cours, nous proposons deux activités permettant de réintroduire les notions à partir de solides simples. Enfin, trois savoir-faire sont associés à cette première partie.
La seconde partie, à laquelle est également associée trois savoir-faire, traite des généralités des droites et plans de l'espace : les règles d'incidences et les positions relatives. On pourra s'appuyer sur l'**activité 3** pour aborder cette partie de cours.
Dans la troisième partie, nous étudions le parallélisme dans l'espace en démontrant deux résultats et mettons en valeur le type de raisonnement utilisé. Bien que présent dans plusieurs manuels de seconde, il faut noter que le théorème du toit n'est pas au programme de la classe ; nous ne l'abordons donc pas. Ce théorème est traité en classe de Terminale S comme indiqué dans les programmes.
La page « **Revoir les points essentiels** » est consacrée aux calculs dans un solide et au parallélisme.
Ce chapitre comporte deux **TP** abordant des problèmes d'optimisations : dans le **TP1**, le problème est résolu par des considérations géométriques alors que, dans le **TP2**, le problème est traité en étudiant une fonction.

Les notions abordées dans le chapitre 13

- Solides de l'espace
- Représentation en perspective cavalière
- Positions relatives de droites et plans dans l'espace
- Parallélisme dans l'espace

C Réactiver les savoirs

Voir manuel page 335 et le site www.bordas-indice.fr pour les corrigés détaillés.

D Activités

Activité 1 Le water Cube de Pékin

Cette activité permet de revoir les principes de la perspective cavalière.

1. Les segments [AD], [DC] et [DH] sont des arêtes cachées du solide, c'est pourquoi ces segments sont représentés en pointillés.

2. L'angle $\widehat{DAB}$ mesure 45°. Il s'agit de l'angle de fuite de la perspective cavalière.

3. En vraie grandeur, les segments [AB] et [BC] sont de la même longueur. On a $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{3}$: il s'agit du coefficient de perspective cavalière.

4. Le triangle ABD est rectangle en A.

5. Les faces ABFE et ADHE sont des rectangles de même dimensions, donc leurs diagonales respectives sont de même longueurs : AF = AH et le triangle HAF est isocèle en A.

6. Le quadrilatère ACGE est un rectangle.

Activité 2 La fourmi gourmande

Cette activité a pour but de calculer des longueurs dans un solide de l'espace et d'utiliser un patron du solide pour optimiser une distance.

Fichiers associés sur* www.bordas-indice.fr *et sur le manuel numérique premium :
13_seconde_activite2.g3w (Geospace).

1. La longueur du chemin H-E-F-B est 15 cm.

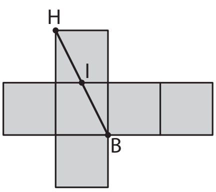
2. a. EFGH est un carré de côté 5 cm, sa diagonale HF mesure $5\sqrt{2}$ cm.

b. La longueur du chemin H-F-B est $5\sqrt{2} + 5$ cm soit 12,07 cm à 0,01 près.

3. a. HEI est rectangle en E. La longueur HI est $\frac{\sqrt{125}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm.

b. La longueur du chemin H-I-B est $\frac{5\sqrt{5}}{2} + \frac{5\sqrt{5}}{2} = 5\sqrt{5}$ cm, soit 7,07 à 0,01 près.

4. a.

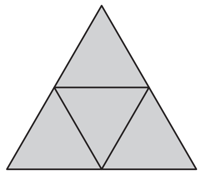


b. Le chemin le plus court mesure $5\sqrt{5}$ cm.

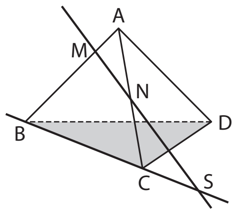
Activité 3 Intersection d'une droite et d'un plan dans un tétraèdre

Dans cette activité, nous étudions l'intersection d'une droite et d'un plan en utilisant la maquette d'un solide que chaque élève réalise.

1. a.



3. a.



b. Dans l'espace, les droites (AC) et (BD) ne sont ni sécantes, ni parallèles.

c. Les droites (AD) et (BC) ne sont pas parallèles, sinon ces droites appartiendraient à un même plan ainsi que les points A, B, C et D, ce qui est absurde.

Activité 4 La tour du château

Cette activité a pour but d'étudier le parallélisme dans l'espace.

Fichiers associés sur* www.bordas-indice.fr *et sur le manuel numérique premium :
13_seconde_activite3.g3w (Geospace).

Correctif : il se peut que dans certains manuels, l'hexagone supérieur soit IJKLGH. Il faut renommer dans ce cas le point L en point M.

1. a. (BC) est parallèle à (FE), (LK) et (HI) et à elle-même.

b. Les droites (FE) et (BC) sont incluses dans le plan (ABC). Les droites (HI) et (LK) sont strictement parallèles au plan (ABC).

2. a. Les droites (PL) et (AB) sont parallèles.

b. Il existe une infinité de plans contenant la droite (PL).

c. On trace la parallèle à (BC) passant par L, R est le point d'intersection de cette parallèle avec le segment [IC].

d. Il y a un seul plan contenant les trois points P, L et R. Le plan cherché est le plan (PLR).

Fiche TICE Constructions avec Geospace

Fichiers associés sur* www.bordas-indice.fr *et sur le manuel numérique premium :

13_seconde_TICE.g3w (fichier élève Geospace), 13_seconde_TICE_correction1.g3w (fichier corrigé enseignant première partie, Geospace) et 13_seconde_TICE_correction2.g3w (fichier corrigé enseignant deuxième partie, Geospace).

E Exercices

Pour démarrer

1 **1.** $AE = k AB = 0{,}4 \times 4 = 1{,}6$

2. $\widehat{CDH}$ doit mesurer 60°.

2 **1.** Non, car les arêtes cachées ne sont pas tracées en pointillées.

2. [AD], [DC] et [DH].

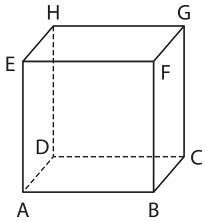
3 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**

4 **1.** 33,8°

2. $2 \times 0{,}7 = 1{,}4$ cm

5 **1.** $k = 0{,}5$

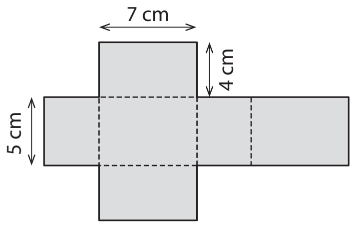
2.



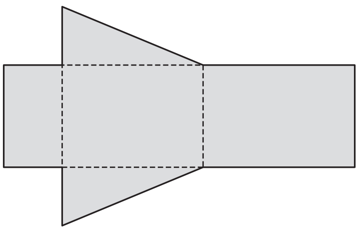
6 Patrons A et B.

7 Patrons B, C, D et E.

8



9 **1.**



10 AB = 5, AD = 7, AE = 6, DE = 3 et BF = 5.

11 **1.** Volume du cube : 125 cm^3

2. Volume du cône : $100\pi \approx 314{,}16$ m^3

3. Volume de la pyramide : 25 cm^2.

12 **1.** Rayon de la boule : 5 cm.

2. Volume de la boule : $\frac{500}{3}\pi \approx 523{,}60$ cm^3.

13 Volume de cire utilisée en cm^3 : $108\,\pi$ soit environ 339,29.

14 **1.** $V = 97{,}5$ m^3

2. $S = 125{,}5$ m^2

15 $V = \frac{125\pi}{4} \approx 98{,}17$ cm^3

16 **1.** $A = 1\,254{,}5764$ m^2

2. $V \approx 9\,049{,}68$ m^3

17 **1.** Un seul plan.

2. Car I appartient à la droite (AB) et (AB) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

3. (AB) et $\mathcal{P}$ sont sécants.

18 **a.** (HC) est strictement parallèle à (ABF).

b. (AB) est sécante au plan (ADF).

c. (DC) est incluse au plan (ABC).

19 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**

20 **a.** (DC) et (CG) sont sécantes donc coplanaires.

b. (AH) et (FC) sont non coplanaires.

c. (AH) et (BG) sont parallèles donc coplanaires.

21 **a.** (HF) et (EG) sont sécantes donc coplanaires.

b. (AD) et (CG) sont non coplanaires.

c. (AH) et (HF) sont sécantes donc coplanaires.

22 **a.** (HI) et (GJ) sont parallèles donc coplanaires.

b. (CK) et (CF) sont sécantes donc coplanaires.

c. (JK) et (AC) sont parallèles donc coplanaires.

23 **a.** (HI) et (CK) sont non coplanaires.

b. (HI) et (JF) sont non coplanaires.

c. (JK) et (GE) sont parallèles donc coplanaires.

24 **1. Faux** **2.** Vrai

25 **Faux**, deux droites de l'espace peuvent être non coplanaires.

26 **a.** (ABF) et (AEG) sont sécants selon la droite (AE).

b. (BFH) et (ADE) sont sécants selon la droite (DH).

c. (ABC) et (FGH) sont strictement parallèles.

27 **a.** (EHD) et (AED) sont confondus.

b. (HEC) et (BEC) sont confondus.

c. (HEC) et (FEC) sont sécants selon la droite (EC).

28 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**

29 Supposons que les points A, B et C soient alignés et notons Δ une droite passant par ces points.

Si $D \in \Delta$, les quatre points sont alignés donc coplanaires ce qui est absurde.

Si $D \notin \Delta$, D et Δ définissent un plan $\mathcal{P}$ qui contient donc les quatre points A, B, C et D qui sont alors coplanaires ce qui est absurde.

Conclusion : A, B et C ne sont pas alignés.

30 **1.** (ABC) et (BCD) sont deux plans distincts car les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires ; d'autre part, C est commun à ces deux plans qui sont donc sécants.
2. L'intersection de (ABC) et (BCD) est la droite (BC).

31 **1.** (d_2) est strictement parallèle à $\mathcal{P}$.
2. $\mathcal{P}$ est parallèle à (ABC).

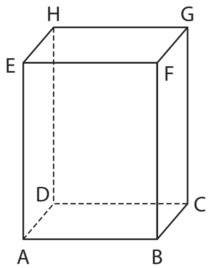
32 La droite (d) est parallèle à (BC) qui est incluse dans le plan (BCD) donc (d) est parallèle à (BCD).

33 **1.** (DCG) est parallèle à (ABF).
2. Δ est parallèle à Δ'.

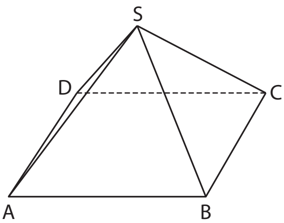
34 **1.** (IJ) est parallèle à (DA) qui est incluse dans (DAB) donc (IJ) est parallèle à (DAB).
2. (JK) est parallèle à (DAB).
3. (IJK) est parallèle à (DAB).

Pour s'entraîner

35

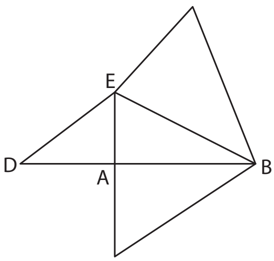


36

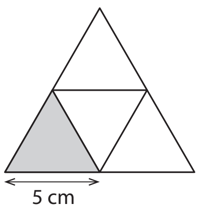


37 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**

38

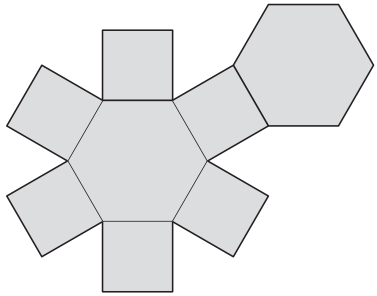


39

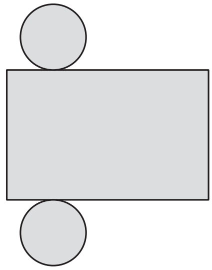


40 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**

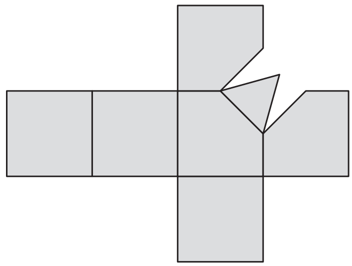
41



42 **1.** $L = 4\pi \approx 12{,}57$
2.



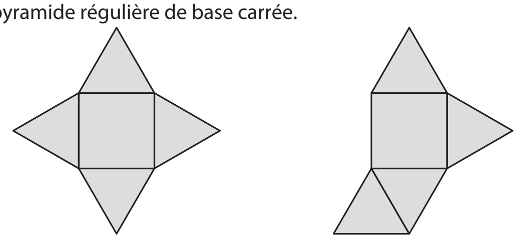
43 **1.** D'après la propriété de la droite des milieux, $IJ = \frac{1}{2}EB$.
2. IJK est équilatéral.
3.



44 **Faux.** Un segment situé dans le plan frontal est représenté en vrai grandeur, tandis qu'un segment de même longueur situé sur une fuyante sera représenté par un segment de longueur inférieure puisque celle-ci sera multipliée par le coefficient de perspective.

45 **Vrai** car, en perspective cavalière, le parallélisme est conservé.

46 **Faux** car les figures ci-dessous sont deux patrons d'une pyramide régulière de base carrée.



47 **1.** $AH = 2\sqrt{2} = FC$
$AF = HC = AC = HF = 2\sqrt{5}$
2. Volume du tétraèdre AHFC : $\frac{16}{3}$ cm^3.

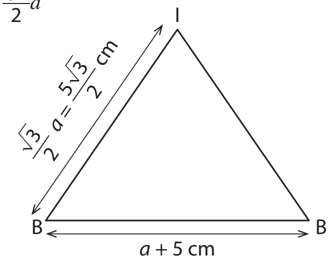
48 **1.** $h = 40$.
2. Aire de ABCD : 2 800 cm^2.
Volume de l'abreuvoir : 336 000 cm^3 soit 336 litres.

49 **1. a.** Volume de métal enlevé : 24π cm^3.
b. Volume de la pièce après perçage : $144–24\pi$.
2. $168 + 16\pi$ cm^2.

50 Volume du jouet : 39π cm^3.

51 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**

52 **1. a.** ABC et ACD sont équilatéraux.
b. $\text{IB} = \text{ID} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$
2.



3. Comme IBD est isocèle en I et J est le milieu de [BD], le triangle IBJ est rectangle en J. On a alors d'après la propriété de Pythagore : $\text{IJ}^2 + \text{BJ}^2 = \text{BI}^2$ soit $\text{IJ}^2 = \text{BI}^2 - \text{BJ}^2$ et $\text{IJ}^2 = \frac{1}{2}a^2$ d'où $\text{IJ} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
4. $\cos \widehat{\text{DIJ}} = \frac{\text{IJ}}{\text{ID}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ donc $\widehat{\text{DIJ}} \approx 35°$ puis $\widehat{\text{DIB}} = 2\,\widehat{\text{DIJ}} \approx 70°$.

53 **Faux.** $V_{\text{L}} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 V$ soit $V_{\text{L}} \approx 0{,}3V$.

54 **Vrai** : La diagonale d'un cube de côté 10 cm mesure $10\sqrt{3}$ cm soit environ 17,3 cm.

55 **Vrai**. $S' = 1{,}21S$.

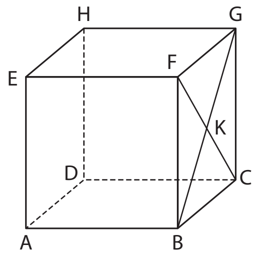
56 **1.** (LH) et (AD) sont coplanaires dans le plan (ADH) et (LH) n'est pas la parallèle à (AD) passant par H.
2. Si (LH) et (AM) étaient parallèles, les points A, M, L et H seraient coplanaires donc H appartiendrait au plan (AML) c'est-à-dire à (ABF) ce qui est absurde.

57 **1.** On applique la réciproque du théorème de Thales au triangle SFB : $\text{I} \in [\text{SF}]$; $\text{J} \in [\text{SB}]$; $\frac{\text{SI}}{\text{SF}} = \frac{\text{SJ}}{\text{SB}}$ donc la droite (IJ) est parallèle à la droite (FB).
2. Si (BC) et (CD) étaient parallèles, les points S, B, C et D seraient coplanaires, donc S appartiendrait au plan (BCD) ce qui est absurde.

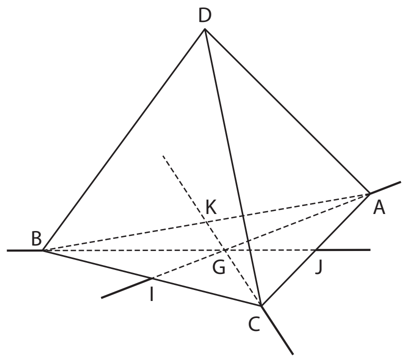
58 **1.** $\text{J} \in (\text{AH})$ et $(\text{AH}) \subset (\text{ABG})$ donc $\text{J} \in (\text{ABG})$.
$\text{L} \in (\text{HB})$ et $(\text{HB}) \subset (\text{ABG})$ donc $\text{L} \in (\text{ABG})$.
2. (JL) et (BG) sont coplanaires dans le plan (ABG).
La parallèle à (BG) passant par J est la droite (AH) donc (JL) n'est pas parallèle à (BG).
Les droites (JL) et (BG) sont coplanaires et non parallèles, elles sont donc sécantes.

59 **1. a.** Dans le triangle SDC, N est le milieu de [SD], M est le milieu de [SC], donc d'après la propriété de la droite des milieux, la droite (MN) est parallèle à la droite (DC).
b. ABMN est un trapèze.
2. [BN] et [AM] sont les diagonales du trapèze ABMN.

60 [FC] et [BG] sont les diagonales du carré BCGF donc les droites (FC) et (BG) sont sécantes en K centre du carré BCGF.
Les points E, B, G et F ne sont pas coplanaires donc la droite (FC) n'est pas incluse dans le plan (EBG). K est un point commun à (EBG) et à (FC) donc (FC) coupe le plan (EBG) en K.

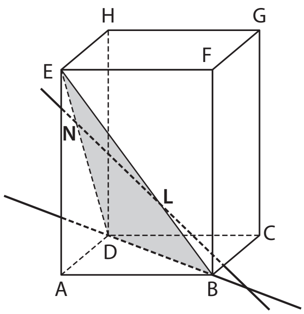


61 **1.** (AI) et (BJ) sont sécantes en G centre de gravité de ABC.
G est le point d'intersection de (AI) et (BDJ).
2. L'intersection de (CK) et (BDJ) est le point G.



62 **Exercice résolu, voir page 297 du manuel.**

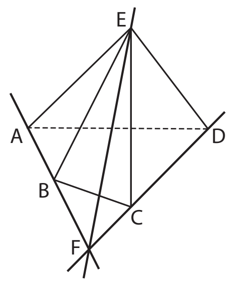
63 (NL) et (DB) sont sécantes dans le plan (EDB), leur point d'intersection K est aussi le point d'intersection de (NL) et (ABC) puisque (DB) est incluse dans (ABC).



64 **Vrai** : les droites (BD) et (HI) sont sécantes dans le plan (BDF).

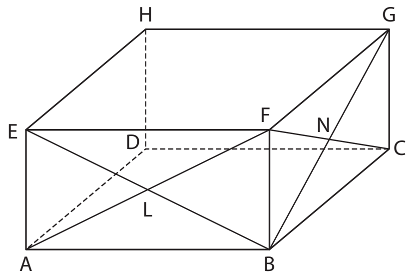
65 **Vrai** : le tétraèdre est régulier donc ses faces sont des triangles équilatéraux. Les deux hauteurs sont sécantes en J milieu de [AD] donc ces droites sont coplanaires.

66 **1.**



2. L'intersection des plans (ABE) et (CDE) est la droite (EF) où F est le point d'intersection de (AB) et (CD).

67 **1.**



2. Soit L l'intersection de (EB) et (AF) et N l'intersection de (FC) et (BG), l'intersection de (EBG) et (AFC) est la droite (LN).

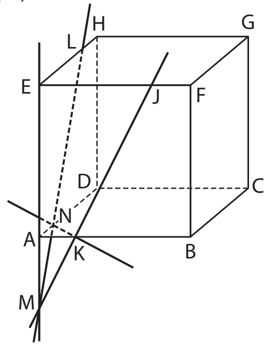
68 **1. Faux** : dans un cube ABCDEFGH, les plans (ABF) et (EFG) sont sécants, or les droites (AB) et(EG) ne sont pas sécantes.

2. Faux : si elle existe, une telle droite est coplanaire avec toutes les droites de $\mathcal{P}'$ donc cette droite doit être incluse dans $\mathcal{P}'$: il ne peut s'agir que de la droite d'intersection Δ de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Si on prend un point A de $\mathcal{P}'$ n'appartenant pas à Δ, la parallèle à Δ passant par A est une droite de $\mathcal{P}'$ qui n'est pas sécante à Δ, seule droite possible.

69 **Exercice résolu, voir page 298 du manuel.**

70 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**

71 **1.** (AE) et (JK) sont sécantes en M.



2. L'intersection des plans (JKL) et (AED) est la droite (LM).

3. Soit N l'intersection des droites (LM) et (AD). La droite (NK) est l'intersection de (JKL) et (ABC).

72 **Vrai** : notons Δ la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Il suffit de choisir un droite (d_1) de P_1 parallèle à Δ et une droite (d_2) de $\mathcal{P}_2$ parallèle à Δ.

73 **Vrai** : la droite (BG) est la médiane issue de B dans le triangle BCD, cette médiane coupe [CD] en son milieu I. I appartient à (ABG) et à (ACD) ces deux plans sont sécants selon la droite (AI) qui est la médiane issue de A dans le triangle ACD.

74 (CD) est parallèle à (AB) et (AB) est parallèle à (IJ) donc (CD) est parallèle à (IJ). Comme par ailleurs (IJ) est incluse dans le plan (IJK), on en déduit que (CD) est parallèle à (IJK).

75 (CC′) est parallèle à (BB′) qui est parallèle à (AA′) donc (CC′) est parallèle à (AA′). Comme (AA′) est incluse dans le plan (AA′F), (CC′) est parallèle à (AA′F).

76 **1. Vrai** : un point appartenant à la fois à un plan $\mathcal{P}'$ et à une droite d'un plan $\mathcal{P}$ appartient aux deux plans, donc si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèle, toute droite du plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}'$ puisque cette droite n'a pas de point commun avec $\mathcal{P}'$.

2. « Si toute droite du plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}'$, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles. » Cette réciproque est fausse car $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ peuvent être confondus.

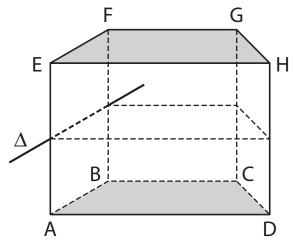
77 **1.** (IJ) est incluse dans le plan (EFG) et (EFG) est parallèle à (ABC) donc (IJ) est parallèle à (ABC).

2. L'intersection de (IJK) et (ABC) est la parallèle à (IJ) passant par K.

78 *Correctif : il se peut que dans certains manuels, les segments [GC] et [CD] n'apparaissent pas en pointillés. Ils doivent l'être car ils sont cachés.*

1. Le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC). L'intersection de (ABF) et (ABC) est la droite (AB) donc Δ est parallèle à (AB).

2.



79 **1. a.** Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [AC], donc d'après la propriété de la droite des milieux (IJ) est parallèle à (AB).

b. (IJ) est parallèle à (AB) qui est incluse dans (ABC) donc (IJ) est parallèle à (ABC).

2. En utilisant la propriété de la droite des milieux dans le triangle BCD, on démontre que (IK) est parallèle à (BD) puis au plan (ABD).

3. (IJK) contient deux droites sécantes toutes les deux parallèles au plan (ABD) donc les plans (IJK) et (ABD) sont parallèles.

80 **1. a.** (AEH) et (BFG) sont parallèles.

b. L'intersection de (AIB) et (AEH) est la droite (AI) et l'intersection des plans (AEH) et (BFG) est la droite (BL). (AEH) et (BFG) étant parallèles, on en déduit que (AI) et (BL) sont parallèles.

2. a. (IJ) est parallèle à (LK) et (LK) est incluse dans (BLK) donc (IJ) est parallèle à (BLK).

b. (AI) est parallèle à (BL) qui est incluse dans (BLK) donc (AI) est parallèle à (BLK).

Comme (IJ) est également parallèle à (BLK) et est sécante avec (AI), les plans (AIJ) et (BLK) sont parallèles.

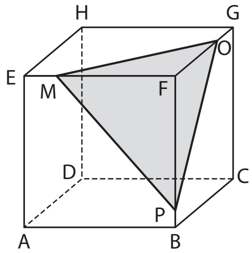
81 **Exercice corrigé, voir page 335 du manuel.**

82 **Vrai** : la droite (BF) est parallèle à la droite (CG) qui est incluse dans le plan (EGC).

83 **Vrai** : le plan (EGO) est le plan (AEG) or (d) est parallèle à (EG) et (BI) est parallèle à (AE).

84 Soit O l'orthocentre du triangle (BDC). O appartient à chacune des hauteurs de ce triangle, donc à chacun des plans (ABH), (ACK) et (ADL) ; comme A est également commun à ces trois plans, la droite (AO) est commune aux trois plans.

85



(MO) est parallèle à (EG) , (MP) est parallèle à (EB).

86 **1.** $V = 60 + \frac{20}{3}x$

2. $x = 3$

Revoir des points essentiels

87 En appliquant le théorème de Thales au triangle AHB, on obtient $\frac{KJ}{AH} = \frac{BK}{BH}$ or $\frac{BK}{BH} = 0{,}4$ et AH = 5 donc KJ = 0,45 soit KJ = 2 cm.

88 En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABD rectangle en A, on obtient $BD^2 = AB^2 + AD^2$ soit : $BD = \sqrt{8^2 + 4^2} = 10$.

Dans le triangle rectangle HDB, on a $HD^2 + BD^2 = BH^2$, on obtient alors $BH = \sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{109}$.

89 **a.** Il suffit d'utiliser la propriété de la droite des milieux dans le triangle ADF.

b. La droite (AF) est incluse dans le plan (ABE) et la droite (IJ) est parallèle à (BF) donc (IJ) est parallèle à (ABF).

90 Les plans (DCG) et (ABF) sont parallèles ; (ADG) et (DCG) sont sécants selon la droite (DG), donc l'intersection (d) de (ADG) et (ABF) est parallèle à (DG). Comme A est commun à (ADG) et (ABF) (d) est la parallèle à (DG) passant par A.

Faire le point

Voir livre page 335. Les corrigés détaillés sont disponibles sur le site www.bordas-indice.fr.

Travaux pratiques

TP 1 La chenille et la feuille de persil

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :

13_seconde_TP1.g3w (fichier élève Geospace)

et 13_seconde_TP1_correction.g3w (fichier corrigé enseignant Geospace).

*Ce TP est un problème d'optimisation d'une distance. La **partie A** est consacrée à des calculs permettant à l'élève de s'approprier le problème.*

*Dans une seconde partie, nous utilisons un logiciel de géométrie dans l'espace pour émettre des conjectures et, dans la **partie C**, nous utilisons des patrons du solide pour répondre au problème posé.*

A. 1. La longueur du chemin est 0 + 8 + 4 = 18.

2. $\sqrt{6^2 + 8^2} + 4 = 14$

3. $8 + \sqrt{4^2 + 6^2} = 8 + \sqrt{52} \approx 15{,}21$

4. $EI = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$

$IC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

La longueur du trajet E-I-C est $5 + \sqrt{52}$ soit environ 12,21.

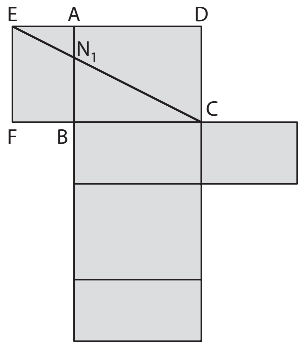
5. Le trajet E-I-C.

B. 2. b. On conjecture que la longueur du chemin le plus court traversant les faces EFGH et BCGF est 12,81 cm.

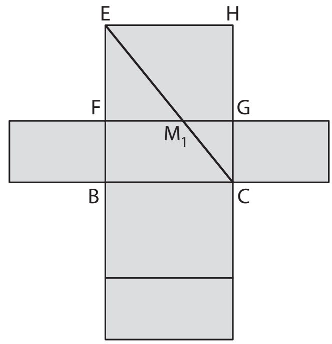
3. c. On conjecture que la longueur du chemin le plus court traversant les faces ABFE et ABCD est 13,42 cm.

5. On conjecture que le chemin le plus court mesure 12,81 cm.

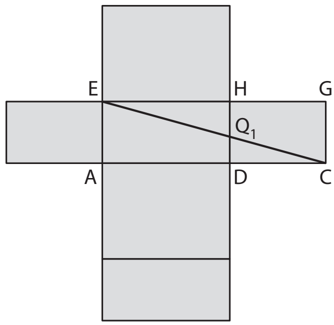
C. 1. Patron où le chemin E-N-C est le plus court.



2. Patron où le chemin E-M-C est le plus court.



3. Patron où le chemin E-Q-C est le plus court.



4. a. $a = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$, $b = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$ et $c = \sqrt{212} = 2\sqrt{53}$.
b. Chemin identique au chemin E-M-C est le chemin traversant les faces ADHE puis ABCD. La face ADHE a les mêmes dimensions que la face BCGF et la face ABCD a les mêmes dimensions que la face EFGH.
Chemin identique au chemin E-N-C : le chemin traversant les faces EFGH et CDHG. La face EFGH a les mêmes dimensions que la face ABCD et la face CDHG a les mêmes dimensions que la face ABFE.
Chemin identique au chemin E-Q-C : le chemin traversant les faces ABFE et BCGF. La face ABFE a les mêmes dimensions que la face DCGH et la face BCGF a les mêmes dimensions que la face ADHE.
c. Le chemin le plus court mesure $2\sqrt{41}$ cm soit environ 12,81 cm.

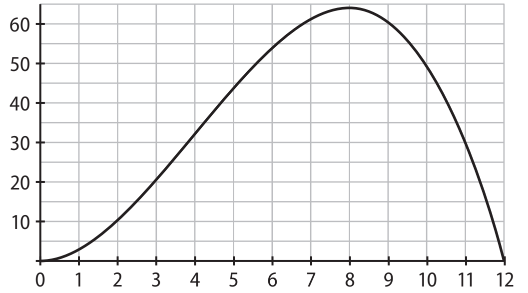
TP2 Le coffret de parfum

Fichiers associés sur www.bordas-indice.fr et sur le manuel numérique premium :
13_seconde_TP2.g3w (fichier élève Geospace),
13_seconde_TP2_correction.g3w (fichier corrigé enseignant Geospace),
13_seconde_TP2.xws (fichier corrigé enseignant Xcas) et
13_seconde_TP2.url (fichier corrigé enseignant GeoGebra disponible sur manuel numérique premium uniquement).

Ce TP est un problème d'optimisation d'un volume. La première partie est consacrée à l'étude du problème à l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace. L'objectif de la seconde partie est de transformer le problème en un problème d'analyse, et dans la dernière partie nous répondons au problème posé.

A. 4. d. On conjecture que le volume maximal de T est 64 cm³.
B. 1. a. Le plan (SAB) coupe (ABC) selon la droite (AB) et le plan $\mathcal{P}$ selon la droite (A'B'). Comme les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont parallèles, les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.
b. On démontre de la même façon que (CD) est parallèle à (C'D') et on déduit que (A'B') et (C'D') sont parallèles. Par un raisonnement analogue, on démontre que (B'C') et (A'D') sont parallèles. Finalement, A'B'C'D' est un parallélogramme.
2. L'intersection de (SAC) et (SBD) est la droite (SO). La droite (A'C') est l'intersection de (SAC) et $\mathcal{P}$, donc O' appartient à (A'C'). De même, O' appartient à (B'D') et O' est le centre du parallélogramme A'B'C'D'.
3. a. x varie dans l'intervalle [0 ; 12].
b. Dans le triangle SAO, A' est un point de [SA], O' est un point de [SO], (A'O') et (AO) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès $\frac{SA'}{SA} = \frac{SO'}{SO}$ soit $\frac{SA'}{SA} = \frac{x}{12}$.
c. Il suffit d'appliquer le théorème de Thalès dans le triangle SAB.
d. $A'B' = \frac{x}{2}$
4. a. L'aire est $\frac{x^2}{4}$.
b $V = \frac{x^2}{4} \times OO' = \frac{x^2}{4} \times (12-x) = 3x^2 - \frac{1}{4}x^3$.

C. 1.



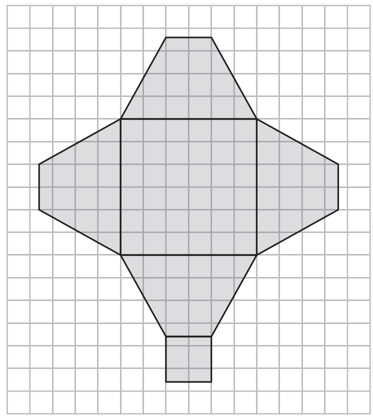
2. Le graphique permet de confirmer la conjecture faite à la question **A. 4. d.** Le volume semble être maximal pour $x = 8$.
3. a. $V(8) - V(x) = 64 - 3x^2 + \frac{1}{4}x^3$
b. On obtient :

$$V(8) - V(x) = \frac{1}{4}(x-8)^2(x+4).$$

c. $V(8) - V(x) \geqslant 0$ pour tout x de l'intervalle I.
d. La conjecture est démontrée car, pour tout réel x de l'intervalle I, $V(x) \leqslant V(8)$ et $V(8) = 64$.
e. Lorsque $x = 8$, T est un cube.

Pour approfondir

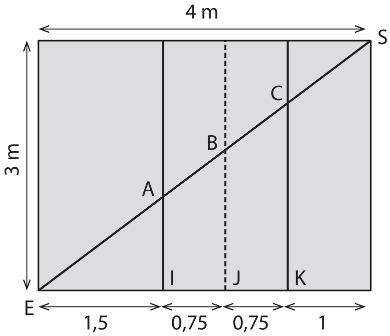
91 On a $AC = \sqrt{2}\,AB$, $EG = \sqrt{2}\,EF$, AI $\frac{1}{2}$ (AC–EG) où I est le point de [AC] tel que AIE est un triangle rectangle en I. On a alors $AI = 2\sqrt{2}$ puis $AE = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.



92 **1.** Type 1 : un cube de côté a donc de volume a^3.
Type 2 : trois parallélépipèdes de côtés a, a et b donc de volume a^2b.
Type 3 : trois parallélépipèdes de côtés b, b et a donc de volume ab^2.
Type 4 : un cube de côté b donc de volume b^3.
2. Le volume du cube d'origine est $(a+b)^3$.
Le somme des volumes des huit solides obtenus est :

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ d'où l'égalité.}$$

93 **1.**



IA = 1,125 ; JB = 1,875 et KC = 2,25.

2. Distance parcourue minimale : $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ mètres donc le temps minimum est 1 heure.

94 **1.** Si on note a, b, c les trois dimensions du pavé, on a $V = abc$ donc $V^2 = a \times b \times c \times a \times b \times c = a \times b \times a \times c \times b \times c$ soit $V^2 = 96 \times 120 \times 240 = 2\,764\,800$ donc $V = 960\sqrt{3}$.

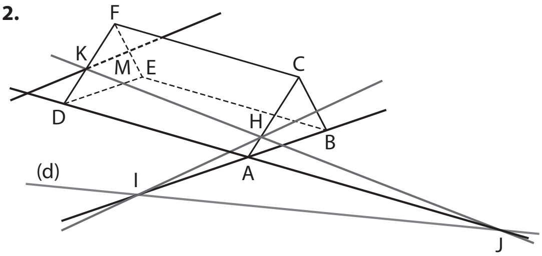
2. $a = \dfrac{V}{96} = 10\sqrt{3}$, $b = 8\sqrt{3}$ et $c = 4\sqrt{3}$.

95 **1. a.** Les plans $\mathcal{P}$ et (ABD) sont donc sécants et leur intersection est la droite (d).

b. La droite (AB) est incluse dans le plan (ABD) donc l'intersection I du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (AB) est l'intersection des droites (AB) et (d).

De même, l'intersection J du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (AD) est l'intersection des droites (AD) et (d).

2.



Les plans $\mathcal{P}$ et (ADC) sont distincts car la droite (d) n'est pas incluse dans le plan (ADC). De plus, le point H est commun aux deux plans donc ces plans sont sécants selon une droite passant par H.

Le point J appartient à la droite (AD) qui est incluse dans le plan (ADC) donc J appartient au plan (ADC).

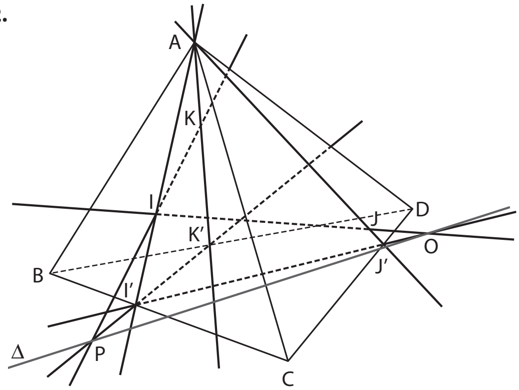
Comme le point J appartient à (d), on en déduit que J appartient également à $\mathcal{P}$ donc à l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (ADC) qui est donc la droite (JH).

3. Les droites (JH) et (DF) sont coplanaires dans le plan (ADC). Notons K l'intersection de ces deux droites. Comme les plans (ABC) et (DEF) sont parallèles, l'intersection (IH) des plans $\mathcal{P}$ et (ABC) est parallèle à la droite d'intersection Δ des plans $\mathcal{P}$ et (EDF). Comme le point K appartient à la droite (JH) qui est incluse dans le plan $\mathcal{P}$, K appartient à $\mathcal{P}$ donc à Δ puisque K appartient à (DF) donc au plan (EDF). La droite Δ est donc la parallèle à (IH) passant par K.

Finalement, l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de l'arête [FC] est l'intersection M du segment [FC] avec la droite Δ.

96 **1.** Si deux des trois droites (IJ), (JK) et (IK) étaient parallèles au plan (BCD) le plan (IJK) serait parallèle à (BCD).

2.



3. Les droites (IK) et (I'K') sont sécantes car (I'K') est la droite d'intersection de (AIK) et (BCD) et (IK) est sécante au plan (BCD).

4. $\mathcal{P}$ appartient à (IK) donc à (IJK) et $\mathcal{P}$ appartient à (I'K') donc à (BCD) ce qui prouve que $\mathcal{P}$ appartient à Δ.

5. On construit le point Q intersection de (I'J') et (IJ). La droite Δ est la droite (PQ).

97 Pour le cube : S = 8 ; F = 6 et A = 12.

Pour le tétraèdre : S = 4 ; F = 4 et A = 6.

Pour le prisme droit à base hexagonale : S = 12 ; F = 8 et A = 18.

98 **1. a.** IJ = $5\sqrt{2}$ cm car il s'agit de la diagonale d'un carré de coté 10 cm.

b. IJ = IK = KJ = $5\sqrt{2}$ cm donc IJK est un triangle équilatéral.

L'aire du triangle IJK est $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$ cm².

c. $V = \dfrac{125}{6}$ et $h = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

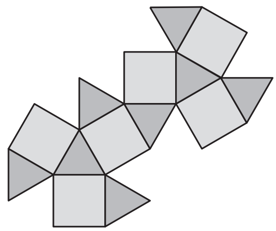
2. a. MNKI est un carré de côté $5\sqrt{2}$ cm.

b. L'aire de MNKI est 50 cm².

c. Le cuboctaèdre a 14 faces : 6 carrés et 8 triangles équilatéraux, 12 sommets et 24 arêtes.

La formule d'Euler est vérifiée car 14 + 12 = 24 + 2.

d.



e. Le volume du cuboctaèdre est $100 - 8 \times \dfrac{125}{6} = \dfrac{2\,500}{3}$ cm³.

f. Le volume du cuboctaèdre est $\dfrac{5}{6}$ du volume du cube.

99 **1.** AF = $a\sqrt{2}$.

2. Le triangle EGD est équilatéral de côté $a\sqrt{2}$, N est le milieu de [EG] et L est le milieu de [ED] donc LN = $\dfrac{1}{2}$ DG soit LN = $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

3. Les faces du solide sont des triangles et chacune des arêtes mesure $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ donc les huit faces sont des triangles équilatéraux.

4. L'octaèdre a 10 arêtes, donc deux de moins que le cube ; le nombre de sommets de l'octaèdre est égal au nombre de faces du cube et le nombre de faces de l'octaèdre est égal au nombre de sommets du cube.

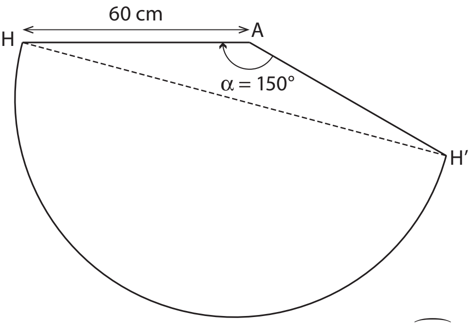
100 **1.** Chaque arête est le côté de deux faces donc : $F \times n = 2 \times A$.
Chaque arête est issue de deux sommets donc $S \times p = 2 \times A$.
On a donc $F \times n = S \times p$.

2. $S + F = \frac{2A}{n} + \frac{2A}{p} = A + 2$ on a alors $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{A+2}{2A} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$.

3. On a $\frac{1}{p} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ car $\frac{1}{A} > 0$. On a $n \geqslant 3$ et $p \geqslant 3$ donc on déduit $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$ soit $p \leqslant 5$ et $\frac{1}{n} > \frac{1}{6}$ soit $n \leqslant 5$.
Les couples (5 ; 5) , (4 ; 5) (5 ; 4) et (4 ; 4) ne conviennent pas, il reste donc cinq couples possibles : (3 ; 3), (3 ; 4), (3 ; 5), (4 ; 3) et (5 ; 3).

4. • Le tétraèdre correspond au couple (3 ; 3). Ce solide a 4 faces, 6 arêtes et 4 sommets.
• Le cube correspond au couple (4 ; 3). Ce solide a 6 faces, 12 arêtes et 8 sommets.
• L'octaèdre correspond au couple (3 ; 4). Ce solide a 8 faces, 12 arêtes et 6 sommets.
• Le dodécaèdre correspond au couple (5 ; 3). Ce solide a 12 faces, 30 arêtes et 20 sommets.
• L'icosaèdre correspond au couple (3 ; 5). Ce solide a 20 faces, 30 arêtes et 12 sommets.

101



Dans le patron ci-dessus du cône, la longueur de $\overset{\frown}{H'H}$ est le périmètre de la base, c'est-à-dire 50π puisque la base circulaire a pour diamètre 50 cm.
On détermine l'angle α en utilisant le tableau de proportionnalité suivant :

Angles (degrés)	360	α
Longueur de l'arc (cm)	120π	50π

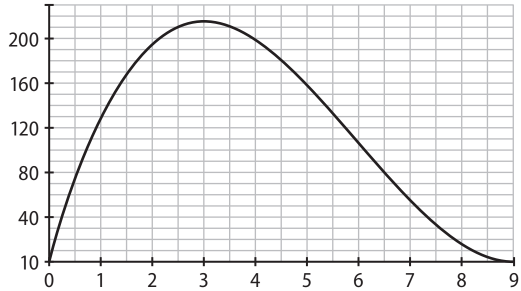
On déduit alors que l'angle $\widehat{H'HA}$ mesure $\frac{180-150}{2} = 15°$ et $\overset{\frown}{H'H} = 2 \times 60\cos(15°) = 120\cos(15°) \approx 115{,}91$ à 0,01 près.
La longueur minimale que doit parcourir l'escargot est 115,91 cm au millimètre près.

102 ***Fichiers associés sur* www.bordas-indice.fr *et sur le manuel numérique premium :***
13_seconde_ex102.xws (fichier corrigé enseignant Xcas) et 13_seconde_ex102.ggb (fichier corrigé enseignant GeoGebra, uniquement disponible sur manuel numérique premium).

A. 3. Si $x = 4$, les dimensions sont 4 cm, 5 cm et 10 cm.
B. 1. a. I = [0 ; 9] ou]0 ; 9[si on refuse les cas extrêmes.
b. Les dimensions sont x ; $9 - x$ et $18 - 2x$.
c. $V(x) = x(9 - x)(18 - 2x)$ en développant on obtient :

$$V(x) = 2x^3 - 36x^2 + 162x.$$

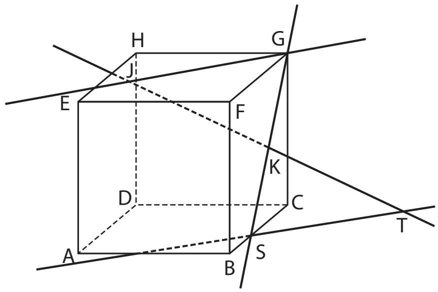
2. a.



b. $V(x) = 200$ pour $x \approx 2{,}1$ et $x = 4$.
c. Le volume semble maximal pour $x = 3$ et le volume maximal semble être égal à 215 cm^3.
3. a. On obtient $V(x) - 200 = 2(x - 4)(x + 2\sqrt{6} - 7)(x - 2\sqrt{6} - 7)$.
b. $x = 4$ et $x = 7 - 2\sqrt{6}$.
4. a. $216 - V(x) = 2(12 - x)(x - 3)^2$.
b. $216 - V(x)$ est positif pour tout x donc $216 \leqslant V(x)$ pour tout x.
c. Le volume de la brique est maximal pour $x = 3$ et ce volume maximal est 216 cm^3.

103 L'intersection de (BK) et (ACE) est le milieu I de [EG].

104



La droite (GK) coupe (BC) en S. L'intersection des plans (JKG) et (EFG) est la droite (JG).
Comme S est commun aux plans (JKG) et (ABC) et les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles, l'intersection des plans (ABC) et (JKG) est la parallèle à (JG) passant par S.
L'intersection de (JK) et (ABC) est l'intersection de la droite (JK) et de la parallèle à (JG) passant par S.

105 **1.** Volume de l'eau : $V_{eau} = 1000\pi - \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{2\,500\pi}{3}$.
On a donc $100\pi \times 2r - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2\,500\pi}{3}$ soit $200r - \frac{4}{3}r^3 = \frac{2\,500}{3}$
et $600r - 4r^3 = 2\,500$ d'où $r^3 - 150r + 625 = 0$.
En utilisant un logiciel de calcul formel, on obtient :

$$r^3 - 150r + 625 = (r - 5)(r^2 + 5r - 125)$$

d'où le résultat puisque $r \neq 5$
2. $r \approx 8{,}96$.