BTS Groupement C - Corrigé de juin 2002

Exercice 1 *(11 points)*

Partie A – Résolution d'une équation différentielle $y''+2y'+y=x+4 \quad (E)$

1. Résoudre sur l'équation différentielle : $y''+2y'+y=0$.
   L'équation caractéristique associée est : $r^2+2r+1=0$
   ou encore : $(r+1)^2=0$.
   On a donc une racine double $r=-1$
   On en déduit que la soloution générale de l'équation $y''+2y'+y=0$ est : $\boxed{y=(Ax+B)\mathrm{e}^{-x}}$.

2. Vérifier que la fonction g définie sur par $g(x)=x+2$ est une solution particulière de (E).
   On a : $g'(x)=1$ et $g''(x)=0$.
   Donc : $g''+2g'+g=0+2+(x+2)$
   Donc : $g''+2g'+g=x+4$.
   Donc g est bien une solution particulière de (E).
   On sait que la solution générale d'une équation différentielle s'obtient en ajoutant une solution particulière et la solution générale de l'équation sans second membre associée.
   Donc la solution générale de (E) est : $\boxed{y=(Ax+B)\mathrm{e}^{-x}+x+2}$.

3. Déterminer la solution particulière f qui vérifie les 2 conditions $f(0)=2$ et $f'(0)=0$.
   On a : $f(x)=(Ax+B)\mathrm{e}^{-x}+x+2$
   Donc : $f'(x)=A\mathrm{e}^{-x}+(Ax+B)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)+1$
   Donc : $f'(x)=(-Ax+(A-B))\mathrm{e}^{-x}+1$.
   Les 2 conditions se traduisent donc par : $\begin{cases} B\mathrm{e}^0+2=2 \\ (A-B)\mathrm{e}^0+1=0 \end{cases}$
   Ce qui donne : $\begin{cases} B=0 \\ A\mathrm{e}^0=-1 \end{cases}$, soit $\begin{cases} A=-1 \\ B=0 \end{cases}$.
   La solution particulière cherchée est donc la fonction f définie sur par : $\boxed{f(x)=-x\mathrm{e}^{-x}+x+2}$.

Partie B – Étude d'une fonction

1. Calcul des limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   On a : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty \end{array}\right\}$ donc, par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\mathrm{e}^{-x}\right)=+\infty$.
   Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty$.
   Les règles de calcul sur la limite d'une somme ne permettent pas de conclure directement.
   Cependant, on peut écrire, pour tout réel x : $f(x)=-x\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)+2$
   or $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}-1=+\infty \end{array}\right\}$ donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)\right)=+\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$.
   On sait que $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{-x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}x+2=+\infty \end{array}\right\}$ on en déduit, par addition que : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$.

2. Calcul de la dérivée de f.
   On a : $f'(x)=(-1)\mathrm{e}^{-x}+(-x)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)+1$.
   Donc : $\boxed{f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^{-x}+1}$.

3. Calcul de $f'(0)$ et signe de $f'(x)$
   On a : $f'(0)=-\mathrm{e}^0+1=0$. Donc $f'(0)=0$.
   Donc, d'après le tableau de variation de la fonction f', on peut dire que :

si $x \in]-\infty\,;0]$, $f'(x) \leq 0$
si $x \in [0\,;+\infty[$, alors $f'(x) \geq 0$.

4. Tableau de variation de f.
D'après la question précédente, on peut dire que :
   - f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$,
   - f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$,
   - f admet un minimum pour $x = 0$ et $f(0) = 2$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2		$\nearrow$		$+\infty$

Partie C – Étude graphique

1. Montrer que la droite D est asymptote à la courbe C.

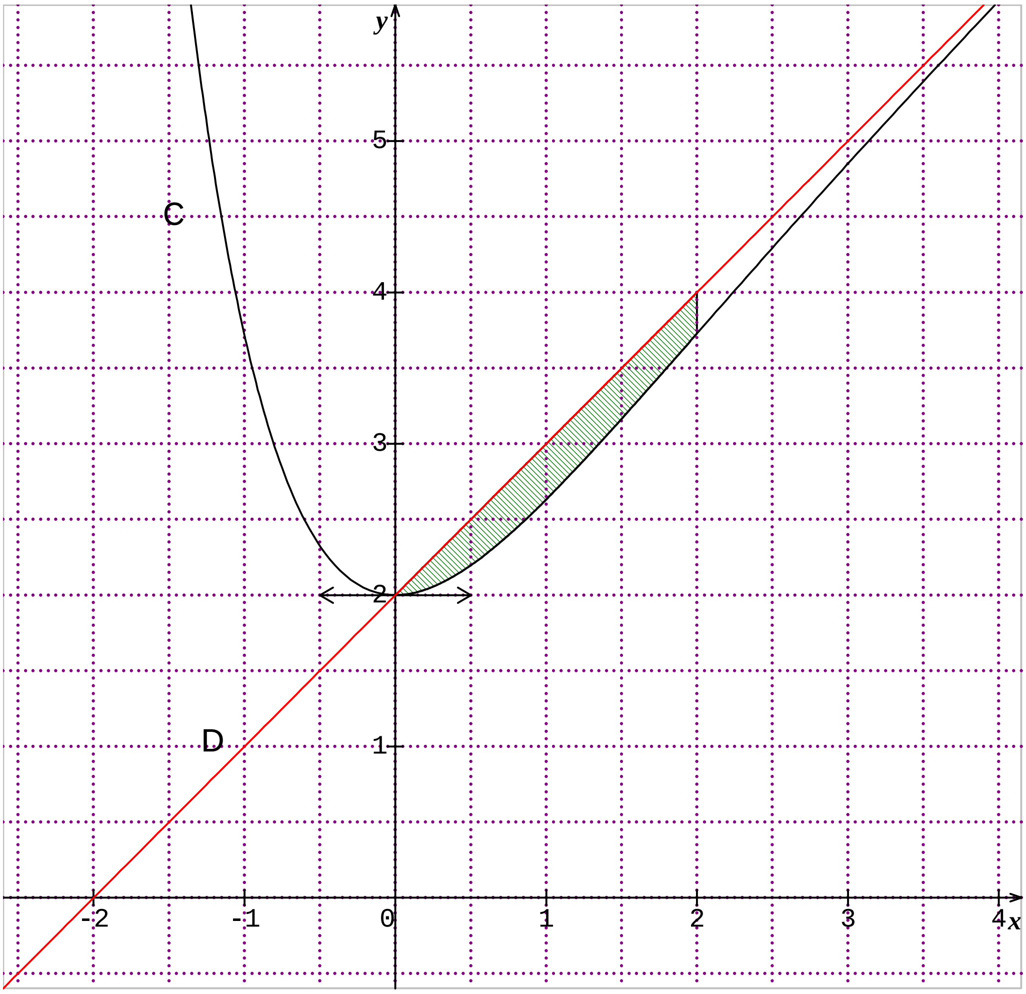
On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$.

Or, pour tout réel x, on a : $f(x) - (x+2) = -x e^{-x}$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$

La droite D d'équation $y = x + 2$ est donc bien asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

2. Construction de D et de C.



3. Calcul d'aire

Pour tout réel x Ã 0, on a $f(x)$ Â $x+2$ car $-x\mathrm{e}^{-x}$ Â 0.
Donc l'aire A du domaine hachuré sur le graphique précédent, est donné par l'intégrale :

$$A = \int_0^2 (x+2) - f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{unités d'aire}$$

Donc, puisque l'unité d'aire vaut 4 cm^2 , ou 400 mm^2: $A = 400 \times \int_0^2 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ mm^2 .

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$. On peut écrire : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

Les fonctions u, v, u' et v' étant dérivables, on peut appliquer le théorème d'intégration par parties :

On a : $\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 -\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

Donc : $\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2$

Donc : $\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \left[(x+1)\mathrm{e}^{-x}\right]_2^0$ (on change de signe car on permute les 2 bornes 0 et 2)

Donc : $\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1 - 3\mathrm{e}^{-2}$

On en déduit que l'aire cherchée est, en mm^2 : $\boxed{A = 400\left(1-3\mathrm{e}^{-2}\right) \text{ ó } 238 \text{ mm}^2}$.

Exercice 2 *(9 points)*

Partie A

D'après l'énoncé, les rubans adhésifs commandés par le grossiste se répartissent selon le tableau suivant :

	Rubatop	ADZif	S.A.Col	Total
Ne satisfont pasau critère C_1	$2{,}9\% \times 27\%$ $= 0{,}783\%$	$3{,}1\% \times 33\%$ $= 1{,}023\%$	$4{,}2\% \times 40\%$ $= 1{,}68\%$	$0{,}783\% + 1{,}023\% + 1{,}68\%$ $= 3{,}486\%$
Satisfont au critère C_1	$27\%-0{,}783\%$ $= 26{,}217\%$	$33\%-1{,}023\%$ $= 31{,}977\%$	$40\%-1{,}68\%$ $= 38{,}32\%$	$100\%-3{,}486\%$ $= 96{,}514\%$
Total	27%	33%	40%	100%

1. Montrer que la probabilité d'obtenir un ruban ne répondant pas au critère C_1 est 0,035 à 10^{-3} près.
D'après le tableau ci-dessus, cette probabilité est de 3,486%, soit 0,03486 ou encore 0,035 à 10^{-3} près.

On pouvait aussi utiliser les probabilités conditionnelles :
Notons les événements :

- C : "le ruban choisi ne satisfait pas le critère C_1",
- R : "le ruban provient de chez Rubatop",
- A : "le ruban provient de chez ADZif",
- S : "le ruban provient de chez S.A. Col".

On a : $p(C) = p(C/R) \times p(R) + p(C/A) \times p(A) + p(C/S) \times p(S)$
Donc : $p(C) = (0{,}029 \times 0{,}27) + (0{,}031 \times 0{,}33) + (0{,}042 \times 0{,}40)$
Donc : $p(C) = 0{,}03486 = 0{,}035$ à 10^{-3} près.

2. Quelle est la probabilité qu'un ruban provienne de chez ADZif sachant qu'il ne répond pas au critère C_1 ?

On a : $p(A/C) = \dfrac{p(C \cap A)}{p(C)}$

Donc : $\boxed{p(A/C) = \dfrac{p(A) \times p(C/A)}{p(C)} = \dfrac{0{,}33 \times 0{,}031}{0{,}035} = 0{,}292 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

Partie B

1. Justifier que X suit une loi binomiale.
   On choisit 500 rubans et on sait que ce choix est assimilable à un tirage aléatoire avec remise.
   Donc les 500 épreuves sont indépendantes.
   Pour chaque épreuve consistant à choisir un ruban, il y a 2 issues :
   - le ruban jaunit le papier (ne répond pas au critère C_2), avec une probabilité de 0,008,
   - le ruban ne jaunit pas le papier.

   La variable X, qui compte le nombre de rubans qui jaunissent le papier, suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0{,}008$: $B(500\,;0{,}008)$.

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces 500 rubans jaunisse le papier ?
   On a : $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$
   Donc : $p(X \geq 1) = 1 - 0{,}992^{500}$
   Donc : $\boxed{p(X \geq 1) = 0{,}982 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$.

Partie C

On veut construire un test unilatéral pour déterminer s'il y a bien 0,8% des rubans qui ne satisfont pas le critère C_2. On note f la fréquence des rubans qui jaunissent le papier.

1. Quelles sont les hypothèses H_0 et H_1 ?
   L'hypothèse H_0 est : $\boxed{f = 0{,}008}$,
   L'hypothèse alternative est : $\boxed{f > 0{,}008}$.

2. La variable qui sert pour le test, F, suit, sous l'hypothèse H_0, la loi normale de moyenne 0,008 et d'écart type $\sqrt{\dfrac{0{,}008(1-0{,}008)}{500}} \approx 0{,}004$: N(0,008 ; 0,004)
   a) Calcul du seuil critique au risque de 5%.
   Posons $T = \dfrac{F - 0{,}008}{0{,}004}$. On sait que T suit la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$.
   On a : $p(F < 0{,}008 + a) = 0{,}95 \iff p\left(T < \dfrac{a}{0{,}004}\right) = 0{,}95$
   $\iff \Pi\left(\dfrac{a}{0{,}004}\right) = 0{,}95$
   $\iff \dfrac{a}{0{,}004} \approx 1{,}645$
   $\iff \boxed{a \approx 0{,}00658}$

   b) Énoncer la règle de décision du test.
   D'après la question précédente, le seuil critique est $0{,}008 + 0{,}00658 \approx 0{,}0146$
   Si, dans un lot de 500 rubans, la proportion de rubans qui jaunissent le papier est inférieure à 0,0146, alors on accepte l'hypothèse H_0 et on rejette l'hypothèse H_1.
   Dans le cas contraire, on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte l'hypothèse H_1.

3. Utilisation du test.
   Sur l'échantillon testé, la proportion de rubans qui jaunissent le papier est $\dfrac{6}{500}$ soit 0,012.
   Ce résultat est inférieur à la valeur critique.
   Donc, au risque de 5% et au vu de cet échantillon, on peut dire que l'affirmation du grossiste ne peut pas être remise en cause.