Chapitre 4. Dérivées

Le programme

Contenus	Modalités	Commentaires
Notions de fonction dérivée	Nombre dérivés en *a* des fonctions de référence. Dérivée des fonctions de référence. Dérivée d'une somme de deux fonctions et du produit d'une fonction par un nombre réel. Position de la courbe par rapport à une tangente.	Dans tous les autres cas où elle serait utile, la fonction dérivée sera fournie. On pourra observer graphiquement le fait que la courbe est au-dessous, au-dessus, traverse sa tangente et savoir l'interpréter pour un problème de la vie courante.
Sens de variation d'une fonction numérique sur un intervalle ***I* = [*a* ; *b*]**	Savoir faire le lien entre le signe du coefficient directeur de la tangente et le sens de variation de la fonction, puis entre le signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction.	Toute théorie est hors programme. Il sera uniquement question de lecture et d'interprétation du tableau de variation et la représentation graphique. Associer un tableau de variation à une courbe donnée et associer une courbe à un tableau de variation donné. On étudiera des fonctions issues des domaines médical, social…
Recherche d'extremums : modélisation de quelques situations faisant intervenir des extremums de fonctions simples.	Déduire de la lecture d'un tableau de variation l'existence d'un minimum ou d'un maximum d'une fonction sur un intervalle donné.	

Nos objectifs

Les élèves abordent dans ce chapitre la notion de fonction dérivée.
Ils apprennent à « manipuler » et à utiliser les fonctions dérivées.
Les problèmes sont aussi l'occasion de retrouver des notions vues en 1re.

Activités et applications

1. Dérivées et fonctions de référence

Activité

1. $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A.

2. a) $f'(-2) = -4$; $f'(0) = 0$; $f'(1) = 2$ et $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3$.

b) L'équation $f'(x) = -2$ est équivalente à $2x = -2$, soit $x = -1$.
Au point d'abscisse -1, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ est égal à -2.

Application 1

1. $f'(x) = 2x$.
$T_0 : y = 0$; $T_1 : y = 2x - 1$.

Application 2

1. On constate graphiquement que $\mathcal{C}_g$ ne semble pas posséder de tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2. Par le calcul : pour tout x de $]0 ; 100]$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

L'équation $f'(x) = 0$ est équivalente à $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$; cette équation n'a pas de solution ; il n'existe donc pas de tangente à $\mathcal{C}_g$ de coefficient directeur égal à 0.

2. Opérations sur les fonctions dérivables

Activité

1. $u'(x) = 2x$; $v'(x) = 1$.

2. a) Tracé calculatrice.

b) $m_1 = u'(-1{,}5) + v'(-1{,}5) = -2$.
En plaçant une petite règle sur l'écran de la calculatrice on visualise la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $-1{,}5$; on constate qu'elle apparaît parallèle à la droite d'équation $y = -2x$.
$f'(-1{,}5)$ étant le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $-1{,}5$, on en déduit que $f'(-1{,}5) = u'(-1{,}5) + v'(-1{,}5)$.

c) Même principe avec $m_2 = 3$.

3. $g'(-2) = -3u'(-2) = 12$ et $g'(1) = -3u'(1) = -6$.

Application

1. f est dérivable sur $[-5 ; 5]$ et $f'(x) = -30x^2 - 1$.

2. g est dérivable sur $[0{,}5 ; 1{,}5]$ et $g'(x) = \dfrac{3}{x^2}$.

3. h est dérivable sur $[1 ; 5]$ et $h'(x) = 12x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. Dérivée, sens de variation et extremums d'une fonction

Activité

1.

x	-2		-1		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-2		-1		1		3
$f(x)$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-1{,}5$	$\nearrow$	$1{,}5$

2. Sur un intervalle où, pour tout x, $f'(x) > 0$, f est strictement croissante ; sur un intervalle où, pour tout x, $f'(x) < 0$, f est strictement décroissante.

Application

1. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$.
f est dérivable sur $[-2 ; 4]$; $f'(x) = -3x^2 + 6x$;
$f'(x) = 3x(2 - x)$.

• Signe de $f'(x)$:

x	-2		0		2		4
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

• Tableau de variation de f :

x	-2		0		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	22	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	-14

f admet un minimum local égal à 2, en 0.
f admet un maximum local égal à 6, en 2.

2. $g(x) = (x - 1)^2 - 1 = x^2 - 2x$.
g est dérivable sur $[-2 ; 4]$; $g'(x) = 2(x - 1)$.

• Tableau de variation de f :

x	-2		1		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	8	$\searrow$	-1	$\nearrow$	8

g admet un minimum local égal à -1, en 1.

3. $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

h est dérivable sur [1 ; 6] ; $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Pour tout x de [1 ; 6], $h'(x) < 0$.

• Tableau de variation de h :

x	1	6
$h'(x)$	–	
$h(x)$	2 ↘	$\frac{7}{6}$

Exercices d'entraînement

C *indique que l'exercice est corrigé dans le livre élève.*

1 **1.** Pour tout x de [0,5 ; 5], $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

2. $f'(1) = -1$ et $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est égal à -1 et le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est égal à $-\frac{1}{4}$.

2 **1.** $f'(x) = 3x^2$. $f'(-2) = 12$, donc le coefficient directeur de T_1 est égal à 12.
2. $f'(1{,}5) = 6{,}75$, donc le coefficient directeur de T_2 est égal à 6,75.

3 **C**

4 **1.** $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

2. $f'(2) = -\frac{1}{4}$ et $f(2) = \frac{1}{2}$.

L'équation réduite de T est $y = -\frac{1}{4}x + p$; on a $\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \times 2 + p$; $p = 1$.

Donc, T a pour équation $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

5 **1.** $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$.

2. $f'(1) = -3$ et $f(1) = 1$.
L'équation de la tangente est $y = -3x + p$; on a $1 = -3 \times 1 + p$; $p = 4$.
Soit l'équation réduite de la tangente : $y = -3x + 4$.

3. Vérification à la calculatrice.

6 *Exercice résolu dans le livre de l'élève.*

7 **1.** $f'(-1)$ est le coefficient directeur de T ; on lit $f'(-1) = 2$.
2. $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, donc on a :

$f'(-1) = 2$; ce qui vérifie le résultat précédent.

8 $f'(1)$ est le coefficient directeur de T ; on lit $f'(1) = -3$. De plus, $f(1) = 1$.
$T : y = -3x + 4$.

9 $f'(x) = 3x^2$.
On a $f'(1) = 3$ et $f'(-1) = 3$.
$f'(1) = f'(-1)$, donc les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses -1 et 1 sont parallèles.

10 $f'(x) = -\frac{5}{x^6}$.

On a $f'(-1) = -5$, donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 est égal à -5.

11 **1.** Vrai.
2. Faux ; le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse -2 est $g'(-2) = 12$.
3. Vrai.
4. Vrai.
5. Faux ; $g'(0) = 0$.
6. Faux ; tous les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses strictement négatives ont une tangente de coefficient directeur strictement négatif.
7. Vrai.
8. Vrai.

12 **C**

13 $f'(x) = 3x^2$.
$f'(x) = -1$ équivaut à $3x^2 = -1$.
Cette équation n'a pas de solution ; on en conclut qu'il n'existe pas de tangente à $\mathscr{C}$ dont le coefficient directeur est égal à -1.

14 **1.** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $x > 0$.

2. On résout l'équation $f'(x) = 1$, successivement équivalente à $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$; $2\sqrt{x} = 1$; $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{4}$.

De plus, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$. Au point de coordonnées $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$,

$\mathscr{C}$ possède une tangente de coefficient directeur égal à 1.

15 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. On résout l'équation $f'(x) = -4$ successivement équivalente à :
$\frac{-1}{x^2} = -4$; $x^2 = \frac{1}{4}$; $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$.
$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.
Aux points de coordonnées $\left(-\frac{1}{2} ; -2\right)$ et $\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$,
$\mathscr{C}$ possède une tangente de coefficient directeur égal à -4.

16 $f'(x) = 5$.

17 $f'(x) = -7$.

18 $f'(x) = -1$.

19 $f'(x) = -\frac{2}{3}$.

20 $f'(x) = 2x - 4$.

21 $f'(x) = -6x + 2$.

22 $f'(x) = -2x + 1$.

23 $f'(x) = 3x - 1$.

24 $f'(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}x + 2$.

25 $f'(x) = -8x^3 + 3x^2 - 5x$.

26 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

27 $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$.

28 $f'(x) = \frac{3}{x^2} - 1$.

29 $f'(x) = 2x + \frac{3}{2x^2}$.

30 $f'(x) = -\frac{6}{x^4}$.

31 **C**

32 $f'(x) = -\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$.

33 $f'(x) = -6x^2 - \frac{6}{x^4}$.

34 $f'(x) = \frac{8}{x^3}$.

35 $f'(x) = \frac{1}{4x^2}$.

36 $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$.

37 $f'(x) = \frac{-5}{2x^2} + \frac{5}{2}$.

38 $f'(x) = \frac{1}{x^3}$.

39 **C**

40 $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}$.

41 $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$.

42 $f'(x) = -2x - \frac{5}{\sqrt{x}}$.

43 $f(x) = -x^4 - 2x$, donc $f'(x) = -4x^3 - 2$.

44 $f(x) = -5x^3 - 14x^2 + 8x - 1$, donc
$f'(x) = -15x^2 - 28x + 8$.

45 $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 12x - 3$, donc
$f'(x) = 6x^2 - x + 12$.

46 $f(x) = 2x^2 - 6x + 2 - \frac{2}{x}$,
donc $f'(x) = 4x - 6 + \frac{2}{x^2}$.

47 $f(x) = -4x^2 + \frac{8}{x}$, donc $f'(x) = -8x - \frac{8}{x^2}$.

48 $f(x) = x - 4 + \frac{4}{x}$, donc $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$.

49 $f(x) = -x^2 + 1 - \frac{1}{x}$, donc $f'(x) = -2x + \frac{1}{x^2}$.

50 $f'(x) = 2x - 5$.

x	0		$\frac{5}{2}$		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$-\frac{13}{4}$	$\nearrow$	3

f présente un minimum local égal à $-\frac{13}{4}$, en $\frac{5}{2}$.

51 $f'(x) = -4x + 6.$

x	-1		$\frac{3}{2}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-6	$\nearrow$	$\frac{13}{2}$	$\searrow$	-6

f présente un maximum local égal à $\frac{13}{2}$, en $\frac{3}{2}$.

52 $f'(x) = 8x.$

x	-3		0		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	35	$\searrow$	-1	$\nearrow$	35

f présente un minimum local égal à -1, en 0.

53 **C**

54 $f'(x) = -6x^2 + 6x.$
$f'(x) = 6x(-x + 1).$

x	-2		0		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	27	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-28

f présente un minimum local égal à -1, en 0, et un maximum local égal à 0, en 1.

55 $f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$

x	0		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	2

f ne présente pas d'extremum local sur I.

56 $f'(x) = 1 - 6x + 9x^2 = (3x-1)^2.$

x	-2		$\frac{1}{3}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	-36	$\nearrow$	$\frac{19}{9}$	$\nearrow$	16

f ne présente pas d'extremum local sur I.

57 $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$; $f'(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$.

x	1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{20}{3}$

f présente un minimum local égal à 4, en 2.

58 $f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{4x^2-1}{x^2}$; $f'(x) = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x^2}$.

x	$0{,}1$		$0{,}5$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$10{,}4$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$8{,}5$

f présente un minimum local égal à 4, en $0{,}5$.

59 **C**

60 $f'(x) = \frac{1}{x^2}$.

x	$0{,}5$		5
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$2{,}8$

f ne présente pas d'extremum local sur I.

61 $f'(x) = 2 + \frac{3}{x^2}$.

x	1		6
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$11{,}5$

f ne présente pas d'extremum local sur I.

62 $f'(x) = -1 - \frac{2}{x^2}$.

x	1		8
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-7{,}75$

f ne présente pas d'extremum local sur I.

63 $f'(x) = -2x - \dfrac{1}{x^2}$.

x	1		3
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{26}{3}$

f ne présente pas d'extremum local sur I.

64 $f'(x) = -3x^2$.

x	-2		0		2
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	10	$\searrow$	2	$\searrow$	-6

f ne présente pas d'extremum local sur I.

65 **C**

66 **1.** $f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$.

2. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $f'(0) = 1$.

3. $-3(x-1)\left(x + \dfrac{1}{3}\right) = -3\left(x^2 + \dfrac{1}{3}x - x - \dfrac{1}{3}\right)$

$= -3\left(x^2 - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}\right) = -3x^2 + 2x + 1$.

Ainsi, $f'(x) = -3(x-1)\left(x + \dfrac{1}{3}\right)$.

• Tableau de signe de $f'(x)$:

x	-2		$-\dfrac{1}{3}$		1		2
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\dfrac{1}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

• D'où le tableau de variation de f :

x	-2		$-\dfrac{1}{3}$		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	9	$\searrow$	$-\dfrac{32}{27}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3

4. Tracé sur l'écran de la calculatrice.

67 **1.** $f'(x) = 6x^2 + x - 1$.

2. $f'(1) = 6$ et $f(1) = \dfrac{3}{2}$; $T : y = 6x - \dfrac{9}{2}$.

3. $6\left(x - \dfrac{1}{3}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = 6\left(x^2 + \dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{6}\right)$

$= 6x^2 + x - 1$, donc $f'(x) = 6\left(x - \dfrac{1}{3}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$.

• Tableau de signe de f :

x	-2		$-\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{1}{3}$		2
$x-\dfrac{1}{3}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\dfrac{1}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• D'où le tableau de variation de f :

x	-2		$-\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{1}{3}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-12	$\nearrow$	$\dfrac{3}{8}$	$\searrow$	$-\dfrac{11}{54}$	$\nearrow$	16

68 *Exercice résolu dans le livre de l'élève.*

69

x	-1		1		2		4		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

70 **1.** Tracé sur l'écran de la calculatrice.

2.

x	-4		-2		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

71 **1.**

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

2. $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$.

72 **1.**

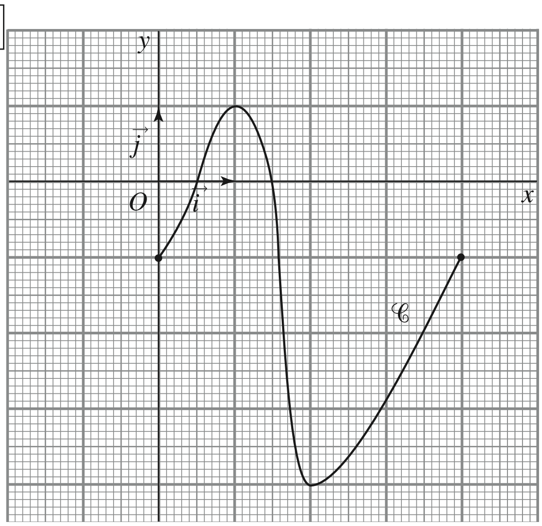
x	-2		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

2. $f'(x) = 2x$.

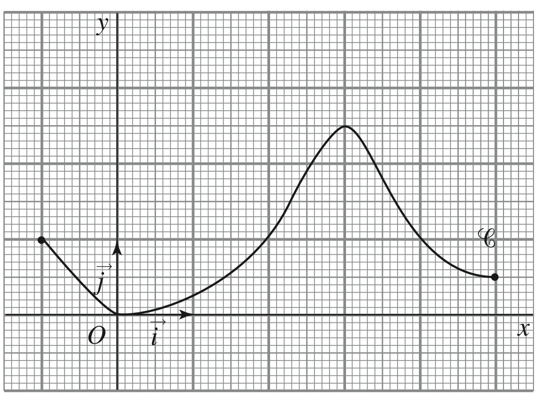
73 **C**

74 **C**

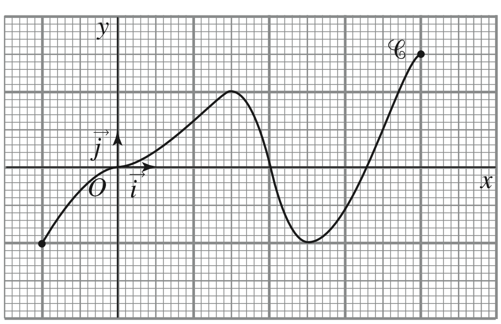
75



76



77



78 *Exercice résolu dans le livre de l'élève.*

79 • Au point d'abscisse 0,5, $\mathscr{C}$ est au-dessous de sa tangente.

• Au point d'abscisse 1, $\mathscr{C}$ est au-dessous de sa tangente.

• Au point d'abscisse 2, $\mathscr{C}$ traverse sa tangente : pour les abscisses inférieures à 2, $\mathscr{C}$ est au-dessous de sa tangente et pour les abscisses supérieures à 2, $\mathscr{C}$ est au-dessus de sa tangente.

• Aux points d'abscisses 3 et 3,5, $\mathscr{C}$ est au-dessus de sa tangente.

80 **1.** $f'(x) = 3x^2 + 1$.

2. Pour tout x de $[-2\,;\,2]$, $f'(x) > 0$.

x	-2		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-9	$\nearrow$	11

3. Tracé sur l'écran de la calculatrice.

4. Au point d'abscisse -1, $\mathscr{C}$ est au-dessous de sa tangente.

• Au point d'abscisse 0, $\mathscr{C}$ traverse sa tangente : pour les abscisses négatives, $\mathscr{C}$ est au-dessous de sa tangente et pour les abscisses positives, $\mathscr{C}$ est au-dessus de sa tangente.

• Aux points d'abscisses 1 et 1,5, $\mathscr{C}$ est au-dessus de sa tangente.

81 **1. a)** Pour tout point d'abscisse a de $[-2\,;\,0[$, $\mathscr{C}$ est au-dessous de sa tangente.

b) $\mathscr{C}$ traverse sa tangente au point d'abscisse 0 : pour les abscisses négatives, $\mathscr{C}$ est au-dessous de sa tangente et pour les abscisses positives, $\mathscr{C}$ est au-dessus de sa tangente.

c) Pour tout point d'abscisse a de $]0\,;\,2]$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de sa tangente.

2. a) Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est supérieur au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse b.

b) Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est inférieur au coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse b.

82 f_1 est associée à la courbe A ; f_2 est associée à la courbe C ; f_3 est associée à la courbe D ; f_4 est associée à la courbe B.

83 g_1 est associée au tableau C ; g_2 est associée au tableau A ; g_3 est associée au tableau B ; g_4 est associée au tableau D.

84 **1.** f présente un minimum local égal à 1, en 3 et un maximum local égal à 3, en 1.
2. Le minimum de f sur I est 1, atteint en 3 ; le maximum de f sur I est 7, atteint en 10.

85 **C**

86 **1.** f présente un minimum local égal à -1, en 5.
2. Le minimum de f sur I est -1, atteint en 5 ; le maximum de f sur I est 4, atteint en 10.

87 **1.** f présente un minimum local égal à -1, en 2 et un maximum local égal à 2, en -2.
2. Le minimum de f sur I est -1, atteint en 2 ; le maximum de f sur I est 3, atteint en 4.

88 **1.** f n'a pas d'extremum local sur I.
2. Le minimum de f sur I est -2, atteint en -4 ; le maximum de f sur I est 4, atteint en 4.

89 **1.** f présente un minimum local égal à -3, en 1 et un maximum local égal à 2, en -1.
2. Le minimum de f sur I est -3, atteint en 1 ; le maximum de f sur I est 2, atteint en -1 et en 2.

90 **1.** f présente un minimum local égal à -4, en 0. f présente un maximum local égal à -1, en -2 et un autre maximum local égal à -1, en 2.
2. Le minimum de f sur I est -4, atteint en -4 et en 0 ; le maximum de f sur I est -1, atteint en -2 et en 2.

Je fais le point

Savez-vous déterminer et utiliser la dérivée d'une fonction de référence ?

Énoncé 1

1. $f'(x) = 3x^2$.
2. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{2}{3}$ est $f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

Énoncé 2

1. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
2. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$.

Savez-vous calculer la dérivée d'une fonction ?

Énoncé 1

$f'(x) = -12x^2 + 4x - \frac{1}{2}$ et $g'(x) = -6x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Énoncé 2

$f'(x) = 4x^2 + 2x - 1$ et $g'(x) = -3x^2 - \frac{2}{x^2}$.

Savez-vous étudier le sens de variation et déterminer les éventuels extremums locaux d'une fonction en utilisant sa dérivée ?

Énoncé 1

$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-4}{4x^2}$; $f'(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{4x^2}$.

x	1		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{5}{4}$	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$\frac{1}{2}$

f présente un minimum local égal à $\frac{3}{4}$, en 2.

Énoncé 2

$f'(x) = -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1-x^2}{x^2}$; $f'(x) = \frac{(1+x)(1-x)}{x^2}$.

x	-4		-1		$-0{,}1$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4,25	↘	2	↗	10,1

f présente un minimum local égal à 2, en -1.

Activités guidées

91 **AG1** **1. a)** $f'(x) = \frac{-3}{x^4}$.

b) Pour tout $x \neq 0$, $x^4 > 0$, donc $f'(x) < 0$.
2. a) Pour tout x de $]-\infty ; 0[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.
Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

b) Tracé sur la calculatrice.

c) f n'est pas strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$. (Par exemple, $-1 < 1$ et $f(-1) < f(1)$.)

L'ensemble $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$, réunion des intervalles $]-\infty\,;\,0[$ et $]0\,;\,+\infty[$ n'est pas un intervalle.

92 **AG2** **1.** $f'(x) = 2x$.

2. a) $f'(a) = 2a$ et $f(a) = a^2$.

T_A a pour équation réduite $y = 2ax + p$.

T_A passe par le point de coordonnées $(a\,;\,a^2)$, donc on a : $a^2 = 2a \times a + p$;

soit :

$p = a^2 - 2a^2$

$p = -a^2$.

Ainsi $T_A : y = 2ax - a^2$.

b)

a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$T_A : y =$	$0{,}2x - 0{,}01$	$0{,}4x - 0{,}04$	$0{,}6x - 0{,}09$	$0{,}8x - 0{,}16$	$x - 0{,}25$

a	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$T_A : y =$	$1{,}2x - 0{,}36$	$1{,}4x - 0{,}49$	$1{,}6x - 0{,}64$	$1{,}8x - 0{,}81$	$2x - 1$

3. a) Les tangentes, en créant une « sorte d'enveloppe », permettent de visualiser l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

4. a) Tracé sur la calculatrice.

b) $\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative de la fonction g définie sur $[-1\,;\,0]$ par $g(x) = x^2$.

93 **AG3** **1. a)** $f(a) = a^3$. $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(a) = 3a^2$.

b) L'équation réduite de T est : $y = 3a^2x + p$.

On a $a^3 = 3a^2 \times a + p$; $p = -2a^3$.

Ainsi, $T : y = 3a^2x - 2a^3$.

2., **3.** et **4.**

Cette activité peut permettre une mise en évidence du caractère local de la notion de position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point, et ainsi l'occasion de commenter le « Le saviez-vous » de la page 111 du livre élève : pour d'éventuelles valeurs de a plus proches de 0 que 0,5, par exemple 0,1, on pourra considérer un intervalle de moindre amplitude, par exemple en remplaçant 0,1 par 0,01 dans les cellules A13 et A15, puis réitérer la démarche pour des valeurs de a encore plus proches de 0.

	A	B	C	D
1	Abscisse de A ; a =	0,5		
2				
3	x	f(x)	y_T	
4	-0,5	-0,125	-0,625	C est au-dessus de T
5	-0,4	-0,064	-0,55	C est au-dessus de T
6	-0,3	-0,027	-0,475	C est au-dessus de T
7	-0,2	-0,008	-0,4	C est au-dessus de T
8	-0,1	-0,001	-0,325	C est au-dessus de T
9	0	0	-0,25	C est au-dessus de T
10	0,1	0,001	-0,175	C est au-dessus de T
11	0,2	0,008	-0,1	C est au-dessus de T
12	0,3	0,027	-0,025	C est au-dessus de T
13	0,4	0,064	0,05	C est au-dessus de T
14	0,5	0,125	0,125	Point de tangence
15	0,6	0,216	0,2	C est au-dessus de T
16	0,7	0,343	0,275	C est au-dessus de T
17	0,8	0,512	0,35	C est au-dessus de T
18	0,9	0,729	0,425	C est au-dessus de T
19	1	1	0,5	C est au-dessus de T
20	1,1	1,331	0,575	C est au-dessus de T
21	1,2	1,728	0,65	C est au-dessus de T
22	1,3	2,197	0,725	C est au-dessus de T
23	1,4	2,744	0,8	C est au-dessus de T
24	1,5	3,375	0,875	C est au-dessus de T

5. Pour tout point d'abscisse a de $[-10\,;\,0[$, $\mathscr{C}$ est au-dessous de T.

$\mathscr{C}$ traverse sa tangente au point d'abscisse 0 ; pour les abscisses négatives, $\mathscr{C}$ est au-dessous de $\mathscr{C}$ et pour les abscisses positives, $\mathscr{C}$ est au-dessus de T.

Pour tout point d'abscisse a de $]0\,;\,10]$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de T.

94 **AG4** **1. a)** $f(a) = -a^3 + a + 1$.

$f'(x) = -3x^2 + 1$, donc $f'(a) = -3a^2 + 1$.

b) L'équation réduite de T est : $y = (-3a^2 + 1)x + p$.

On a : $-a^3 + a + 1 = (-3a^2 + 1)a + p$; $p = 2a^3 + 1$.

Ainsi, $T : y = (-3a^2 + 1)x + 2a^3 + 1$.

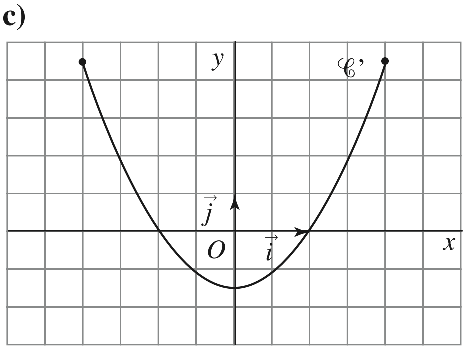
2., **3.** et **4.**

	A	B	C	D
1	Abscisse de A ; a =	0,5		
2				
3	x	f(x)	y_T	
4	-0,5	0,625	1,125	C est au-dessous de T
5	-0,4	0,664	1,15	C est au-dessous de T
6	-0,3	0,727	1,175	C est au-dessous de T
7	-0,2	0,808	1,2	C est au-dessous de T
8	-0,1	0,901	1,225	C est au-dessous de T
9	0	1	1,25	C est au-dessous de T
10	0,1	1,099	1,275	C est au-dessous de T
11	0,2	1,192	1,3	C est au-dessous de T
12	0,3	1,273	1,325	C est au-dessous de T
13	0,4	1,336	1,35	C est au-dessous de T
14	0,5	1,375	1,375	Point de tangence
15	0,6	1,384	1,4	C est au-dessous de T
16	0,7	1,357	1,425	C est au-dessous de T
17	0,8	1,288	1,45	C est au-dessous de T
18	0,9	1,171	1,475	C est au-dessous de T
19	1	1	1,5	C est au-dessous de T
20	1,1	0,769	1,525	C est au-dessous de T
21	1,2	0,472	1,55	C est au-dessous de T
22	1,3	0,103	1,575	C est au-dessous de T
23	1,4	-0,344	1,6	C est au-dessous de T
24	1,5	-0,875	1,625	C est au-dessous de T

Comme l'AG3, cette activité peut permettre une mise en évidence du caractère local de la notion de position d'une courbe par rapport à sa tangente en un point, et ainsi l'occasion de commenter le « Le saviez-vous » de la page 111 du livre élève : pour d'éventuelles valeurs de a plus proches de 0 que 0,5, par exemple 0,1, on pourra considérer un intervalle de moindre amplitude, par exemple en remplaçant 0,1 par 0,01 dans les cellules A13 et A15, puis réitérer la démarche pour des valeurs de a encore plus proches de 0.

5. Pour tout point d'abscisse a de $[-10\,;\,0[$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de T.
$\mathscr{C}$ traverse sa tangente au point d'abscisse 0 ; pour les abscisses négatives, $\mathscr{C}$ est au-dessus de T et pour les abscisses positives, $\mathscr{C}$ est au-dessous de T.
Pour tout point d'abscisse a de $]0\,;\,10]$, $\mathscr{C}$ est au-dessous de T.

95 **AG5** **1. a)** $f'(-2) = 3$; $f'(-1) = 0$; $f'(0) = -1$; $f'(1) = 0$ et $f'(2) = 3$.
b) et **c)**



2. a) $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}$.
b) Tracé sur l'écran de la calculatrice.

Problèmes

96 **1.** Réponse **c**).
2. Réponse **a**).
3. Réponse **a**).

97 **1.** Réponse **b**).
2. Réponse **c**).
3. Réponse **c**).
4. Réponse **a**).

98 **1.** $f'(x) = 2x + 1$.

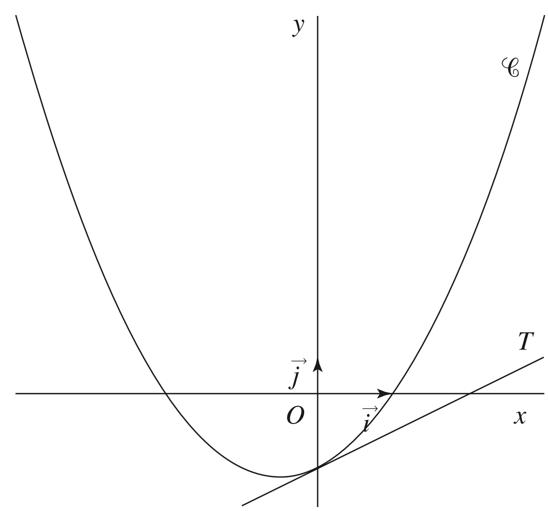
2.

x	-4		$-\frac{1}{2}$		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	10	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	10

3. $T : y = x - 2$.
4. a) $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$.
b) $f(x) = 0$ équivaut à $(x + 2)(x - 1) = 0$,
soit $x = -2$ ou $x = 1$.
$\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses pour $x = -2$ et pour $x = 1$.
c)

x	-4		-2		1		3
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x + 2)(x - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour tout x de $[-4\,;\,-2[\, \cup \,]1\,;\,3]$, $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.
Pour tout x de $]-2\,;\,1[$, $\mathscr{C}$ est au-dessous de l'axe des abscisses.
5.



99 **1.** $f(0) = 0$; $f(1) = -2$.
$f'(1)$ est le coefficient directeur de T_1, donc $f'(1) = 0$.
2.

x	-1		1		2
$f'(x)$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

3. • $f(0) = 0$ équivaut à $c = 0$.
• $f(1) = -2$ équivaut à $a + b = -2$.
• $f'(x) = 3ax^2 + b$.
$f'(1) = 0$ équivaut à $3a + b = 0$.

D'où le système : $\begin{cases} a + b = -2 \\ 3a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

$a = 1$; $b = -3$; $c = 0$.

$f(x) = x^3 - 3x$.

4. $f'(0)$ est le coefficient directeur de T_0, on lit $f'(0) = -3$.

Par le calcul : $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(0) = -3$.

5. On résout l'équation $f(x) = 0$, successivement équivalente à $x^3 - 3x = 0$; $x(x^2 - 3) = 0$; $x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$.

Les solutions sont 0, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

On rejette $x = -\sqrt{3}$ qui n'appartient pas à $[-1 ; 2]$.

Ainsi, $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(0 ; 0)$ et $(\sqrt{3} ; 0)$.

$\boxed{100}$ **1.** f est strictement croissante sur $[0,2 ; 7]$.

2. $\mathscr{C}$ coupant l'axe des abscisses pour $x = 0,3$, la solution de l'équation $f(x) = 0$ est 0,3.

3. $f(x) = x + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.

$f'(x) = 1 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3}$.

Or $(x - 1)^2 (x + 2) = (x^2 - 2x + 1)(x + 2)$
$= x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2$
$= x^3 - 3x + 2$.

Donc $f'(x) = \dfrac{(x - 1)^2 (x + 2)}{x^3}$.

4. $f'(1) = 0$, donc $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en $x = 1$.

5. Sur $[0,2 ; 7]$, $(x - 1)^2 \geqslant 0$ et $x^3 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x + 2$.

x	0,2		1		7
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	−9,8	↗	3	↗	7,4

6. Au point d'abscisse 0,5, $\mathscr{C}$ est située au-dessous de sa tangente ; au point d'abscisse 1, $\mathscr{C}$ traverse sa tangente et au point d'abscisse 3, $\mathscr{C}$ est située au-dessus de sa tangente.

$\boxed{101}$ **Partie A**

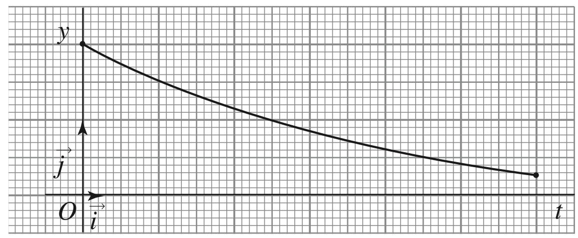
1. a) $f'(t) = 0,004t - 0,12$.

b) $f'(t)$ est nul pour $t = 30$ et puisque $0,004 > 0$, $f'(t) < 0$ pour $t < 30$, donc pour tout t de $[0 ; 24]$, $f'(t) < 0$.

c)

t	0		24
$f'(t)$		−	
$f(t)$	2	↘	0,272

2.



Partie B

1. a) $\mathscr{C}$ coupe la droite d'équation $y = 1$ pour $t = 10$; la quantité de médicament présente dans le sang est la moitié de la dose injectée au bout de 10 heures.

b) Graphiquement, on peut estimer à 14 % le pourcentage de la quantité de médicament restant dans le sang au bout de 24 heures.

2. a) $\dfrac{f(24)}{f(0)} = \dfrac{0,272}{2} \approx 0,136$.

b) $0,002\,(t - 50)\,(t - 10) = 0,002\,t^2 - 0,12\,t + 1$.

L'équation $f(t) = \dfrac{1}{2} f(0)$ est successivement équivalente à :

$0,002\,t^2 - 0,12\,t + 2 = 1$; $0,002\,t^2 - 0,12\,t + 1 = 0$; $0,002\,(t - 50)\,(t - 10) = 0$; $t - 50 = 0$ ou $t - 10 = 0$; $t = 50$ ou $t = 10$.

$t = 50$ n'appartient pas à $[0 ; 24]$; la seule solution est $t = 10$.

c) $\dfrac{f(24)}{f(0)} \approx 13,6\,\%$; on retrouve le résultat de la question **1.b)**. La solution sur $[0 ; 24]$ de l'équation $f(t) = \dfrac{1}{2} f(0)$ permet de retrouver par le calcul le résultat de la question **1.a)**.

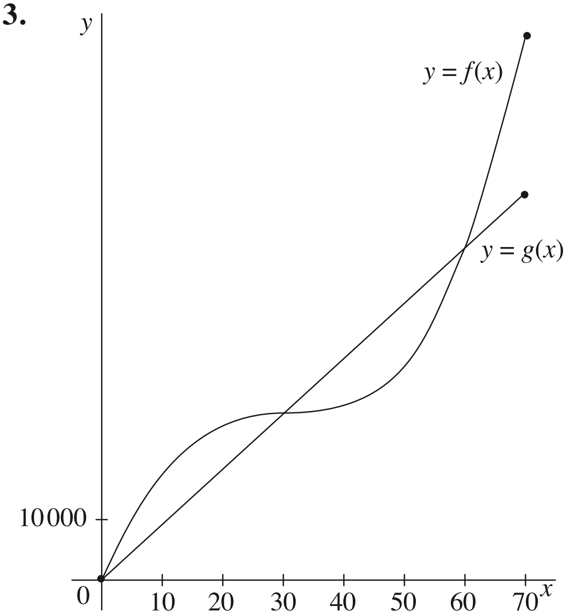
$\boxed{102}$ **Partie A**

1. $f'(x) = 3x^2 - 180x + 2\,700$
$= 3(x^2 - 60x + 900)$
$= 3(x - 30)^2$.

2.

x	0		30		70
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	0	↗	27000	↗	91000

3.



Partie B

1. $g(x) = 900x$.

2. Voir le graphique.

3. $h(x) = g(x) - f(x)$.

a) L'équation $h(x) = 0$ a trois solutions, les nombres 0, 30 et 60.

b) $(30 - x)(60 - x) = x^2 - 90x + 1\,800$.

$$\begin{aligned} h(x) &= 900x - x^3 + 90x^2 - 2\,700x \\ &= -x^3 + 90x^2 - 1\,800x \\ &= -x(x^2 - 90x + 1\,800) \\ &= -x(30 - x)(60 - x). \end{aligned}$$

L'équation $h(x) = 0$ est équivalente à :

$-x(30 - x)(60 - x) = 0$.

Les solutions sont : 0 ; 30 et 60.

4.

x	0		30		60		70
position de $\mathscr{C}_g$ par rapport à $\mathscr{C}_f$		$\mathscr{C}_g$ au-dessous de $\mathscr{C}_f$		$\mathscr{C}_g$ au-dessus de $\mathscr{C}_f$		$\mathscr{C}_g$ au-dessous de $\mathscr{C}_f$	
$h(x)$	0	–	0	+	0	–	

L'entreprise dégage un bénéfice pour les valeurs de x telles que $h(x) > 0$, soit pour $30 < x < 60$.

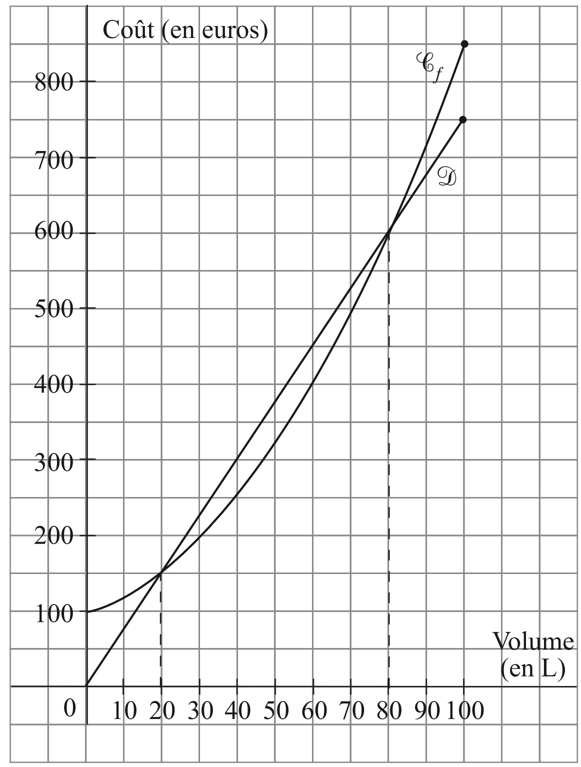
103 **Partie A**

1. a) Pour une production journalière de 20 litres, le coût de fabrication est 150 € ; pour 80 litres, 600 €.

b) Un coût de fabrication de 250 € correspond à une production journalière de 40 litres.

c) Pour que le coût de fabrication n'excède par 500 €, il ne faut pas dépasser une production journalière de 70 litres.

2. a)



b) L'entreprise est bénéficiaire pour une production journalière comprise strictement entre 20 litres et 80 litres.

Partie B

1. $f'(x) = 0{,}125x + 1{,}25$; $f'(x) > 0$ sur $[0 ; 100]$.

x	0		100
$f'(x)$		0	
$f(x)$	100	↗	850

2. a) $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 7{,}5 - 0{,}125x - 1{,}25$; $h'(x) = -0{,}125x + 6{,}25$.

x	0		50		100
$h'(x)$		+	0	–	
$h(x)$	– 100	↗	56,25	↘	– 100

b) Le bénéfice est maximal pour une production journalière de 50 litres ; ce bénéfice est alors égal à 56,25 euros.

104 **Partie A**

1. a) $f'(t) = 90t - 3t^2 = 3t(30 - t)$.

b)

t	0		30		45
$3t$	0	+		+	
$30 - t$		+	0	−	
$3t(30 - t)$	0	+	0	−	

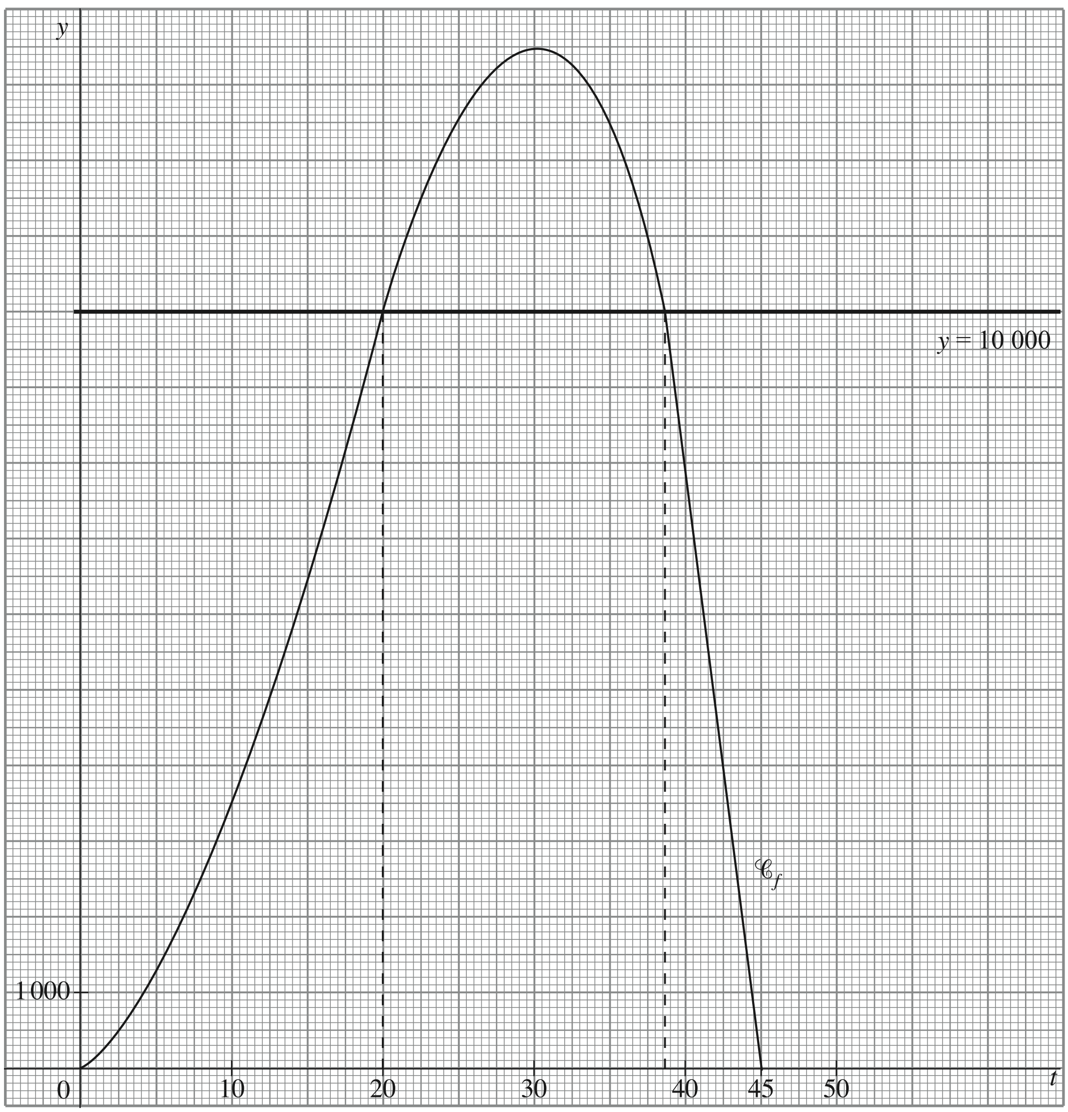
c)

t	0		30		45
$f'(t)$	0	+	0	−	
$f(t)$	0	↗	13 500	↘	0

2.

t	0	10	20	25	30	35	40	45
$f(t)$	0	3 500	10 000	12 500	13 500	12 250	8 000	0

3.



Partie B

1. Le nombre de personnes malades est maximal au 30e jour ; on compte alors 13 500 malades.

2. Le nombre de malades est supérieur ou égal à 10 000 entre le 20e et le 38e jour.

105 **1. b)** En tout point d'abscisse t de $[0\,;7[$, $\mathscr{C}$ est située au-dessus de sa tangente.

c) $\mathscr{C}$ est située au-dessous de sa tangente en tout point d'abscisse t de $]7\,;14]$.

2. Du jour 0, correspondant au seuil épidémique, jusqu'au 7e jour, le nombre de cas recensés a augmenté de plus en plus vite ; à partir du 7e jour, il a augmenté de moins en moins vite.

106 **Partie A**

1. $f'(t) = -3t^2 + 90t - 675$.

Or, $-3(t-15)^2 = -3(t^2 - 30t + 225)$

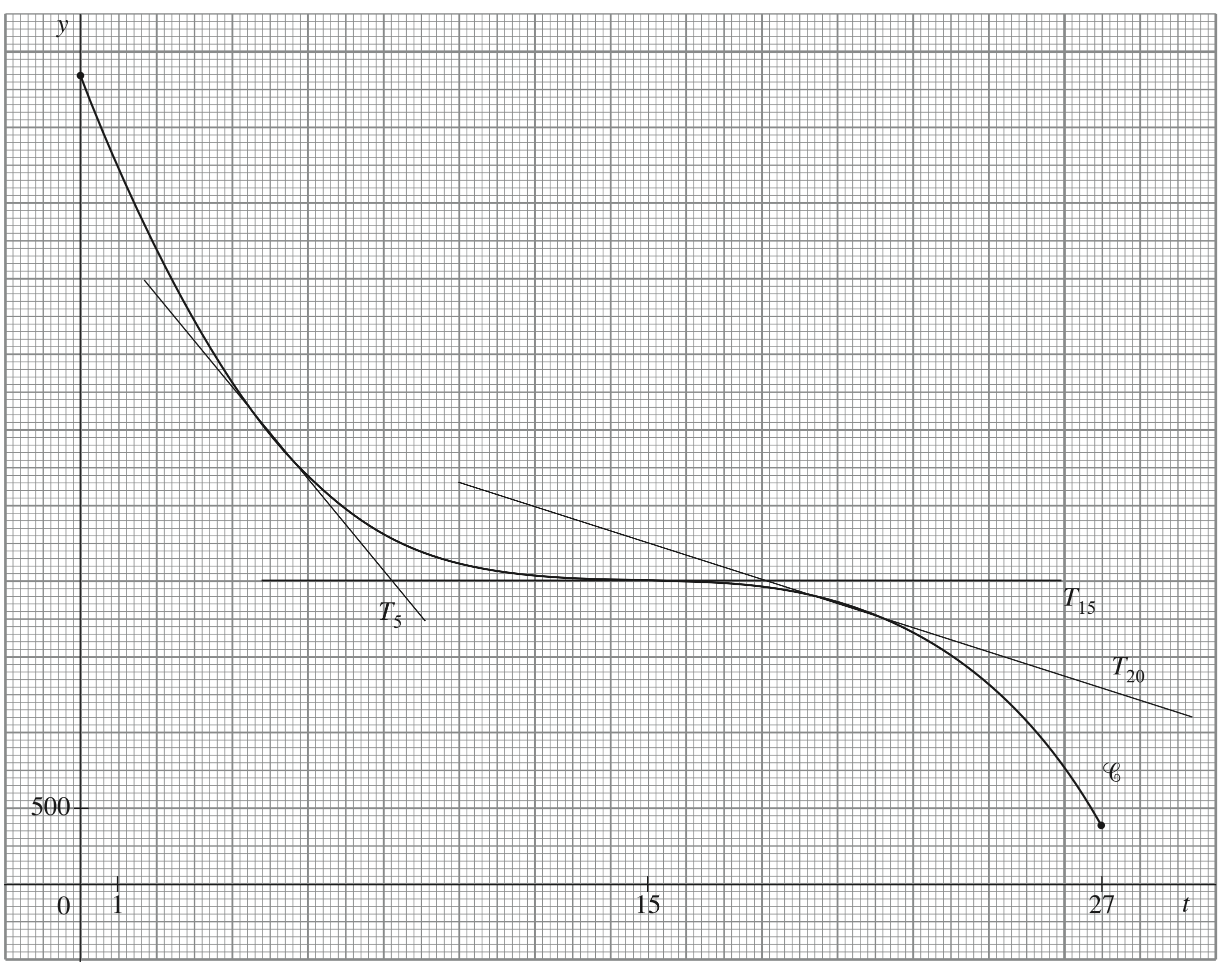
$= -3t^2 + 90t - 675$,

donc $f'(t) = -3(t-15)^2$.

2. Pour tout t de $[0 ; 27]$, $f'(t) \leqslant 0$.

t	0	15	27
$f'(t)$	–	0	–
$f(t)$	5 375	2 000	272

3.



4. a) $f'(5) = -300$; $f'(15) = 0$ et $f'(20) = -75$.

b) Au point d'abscisse 5, $\mathscr{C}$ est au-dessus de sa tangente ; au point d'abscisse 15, $\mathscr{C}$ traverse sa tangente et au point d'abscisse 20, $\mathscr{C}$ est au-dessous de sa tangente.

Partie B

1. $-(t-15)^3 + 2\,000 = -(t-15)^2(t-15) + 2\,000$;

$-(t-15)^3 + 2000 = -(t^2 - 30t + 225)(t-15) + 2\,000$;

$-(t-15)^3 + 2\,000 = -t^3 + 15t^2 + 30t^2 - 450t - 225t + 3\,375 + 2\,000$;

$-(t-15)^3 + 2\,000 = -t^3 + 45t^2 - 675t + 5\,375 = f(t)$.

2. Le nombre de bactéries à l'instant $t = 0$ est $f(0) = 5\,375$.

3. Le nombre de bactéries a diminué de moitié (à peu près égal à 2 688) au bout d'environ 7 heures.

4. Le nombre de bactéries devient inférieur à 20 % de sa population initiale (1 075) au bout de 25 heures environ.
5. Le nombre de bactéries décroît de moins en moins vite jusqu'à l'instant $t = 15$ heures, puis décroît de plus en plus vite jusqu'à l'instant $t = 27$ heures.

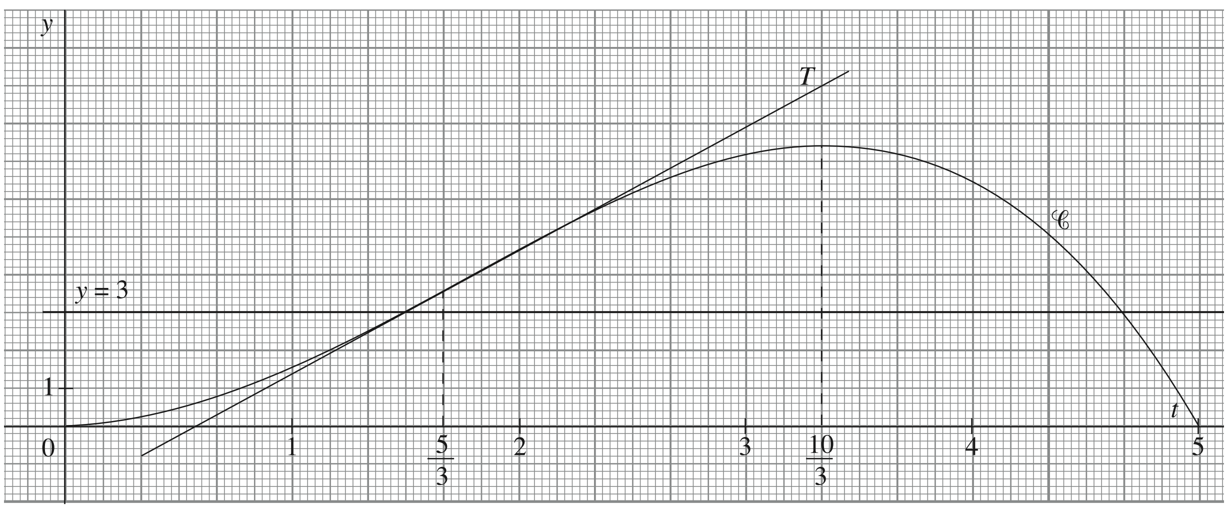
107 **Partie A**

1. a) $f'(t) = -1{,}2t^2 + 4t = -\frac{2}{5}t(3t - 10)$.

b)

t	0		$\frac{10}{3}$		5
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{200}{27}$	$\searrow$	0

c)



2. a) $f'\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{10}{3}$.

$\mathscr{C}$ traverse sa tangente au point d'abscisse $\frac{5}{3}$.

b) Pour tout point d'abscisse t_0 de $\left[0\,;\,\frac{5}{3}\right[$, $\mathscr{C}$ est située au-dessus de T.

c) Pour tout point d'abscisse t_0 de $\left]\frac{5}{3}\,;\,5\right]$, $\mathscr{C}$ est située au-dessous de T.

Partie B

1. a) Graphiquement, on lit $f(3{,}25) \approx 7{,}4$; au bout de 3 heures et quart, il y a environ 7,4 mg de principe actif dans le sang du malade.
b) Par le calcul : $f(3{,}25) \approx 7{,}4$ arrondi à 10^{-1}.

2. La quantité de principe actif est maximale au bout de $\frac{10}{3}$ heures, soit 3 heures 20 minutes ; la quantité de principe actif est alors égale à 7,4 mg arrondi à 10^{-1}.

3. De $t = 0$ à $t = \frac{5}{3}$, la quantité de principe actif croît de plus en plus vite ; de $t = \frac{5}{3}$ à $t = \frac{10}{3}$, cette quantité croît de moins en moins vite. Elle décroît ensuite de plus en plus vite jusqu'à $t = 5$.

4. Le médicament est efficace entre approximativement les instants $t = 1{,}5$ et $t = 4{,}6$, soit durant 3 heures 6 minutes environ.

108 **Partie A**

1. a) Tracé sur la calculatrice.

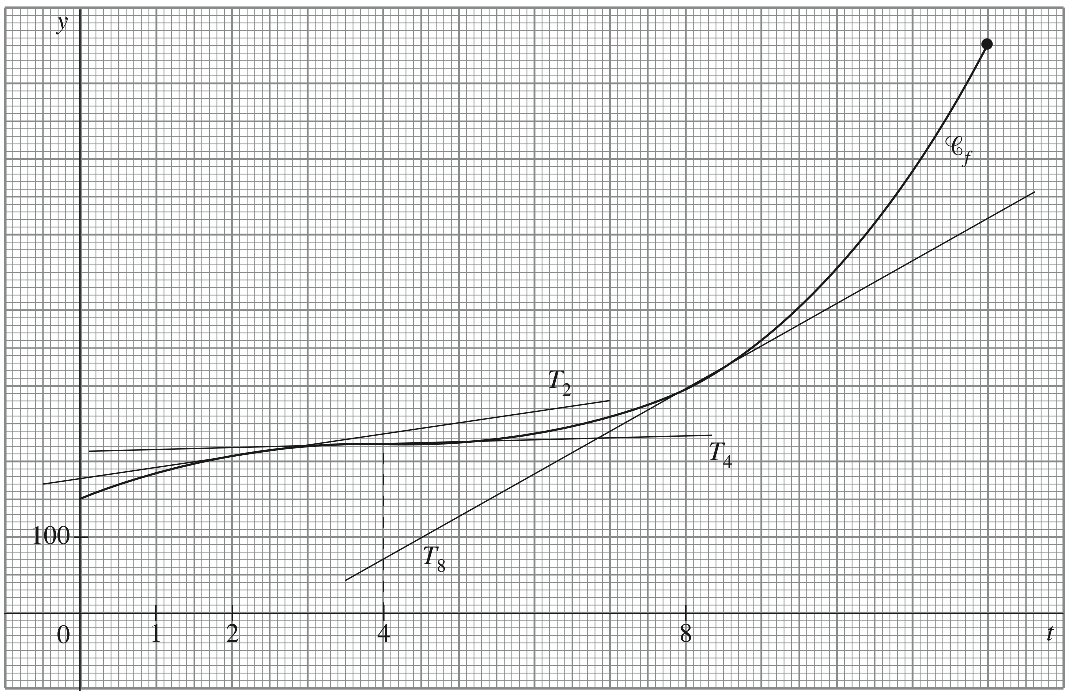
b) $g(t) > 0$ pour tout t de [0 ; 12], car la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de l'axe des abscisses.

2. a) $f'(t) = 3t^2 - 24t + 50 = g(t)$.

b) D'après les questions **1.b)** et **2.a)**, $f'(t) > 0$ pour tout t de [0 ; 12].

t	0		12
$f'(t)$		+	
$f(t)$	150	↗	750

c)



d) $f'(4) = 2$. $\mathscr{C}$ traverse sa tangente au point d'abscisse 4.

e) Au point d'abscisse 2, $\mathscr{C}$ est située au-dessous de sa tangente ; au point d'abscisse 8, $\mathscr{C}$ est située au-dessus de sa tangente.

Partie B

De $t = 0$ à $t = 4$, la population de bactéries croît, de moins en moins vite, puis croît toujours, mais de plus en plus vite, de $t = 4$ à $t = 12$.

La molécule a été efficace durant les 4 premières heures…

Tableur sur papier

1. La courbe représentative de f correspond au tracé Ⓒ.

2. On entre les valeurs -2 et $-1{,}8$ respectivement dans les cellules A2 et A3. On sélectionne ces 2 cellules que l'on recopie vers le bas jusqu'à la cellule A27.

3. a) $f'(x) = -3x^2 + 6x$.

b) Il s'agit de la formule (3).

c) On obtient $\boxed{\text{=–3*A16^2+6*A16}}$.

d) • $f'(x) = 0$ équivaut successivement à :
$-3x^2 + 6x = 0$; $-3x(x-2) = 0$; $x = 0$ ou $x = 2$.
Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont 0 et 2.

x	-2		0		2		3
$-3x$		+	0	−		−	
$x-2$		−		−	0	+	
$f'(x)$		−	0	+	0	−	

• L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) > 0$ est]0 ; 2[.

• L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est [−2 ; 0[∪]2 ; 3].

On retrouve les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ dans les cellules A12 et A22.

e)

x	-2		0		2		3
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	27	↘	1	↗	5	↘	1